偏微分方程式の導出

1.　一次元波動方程式（弦の振動）

両端が固定されたまっすぐに張った一様な弦（下図）に波が伝わるとする．ここで,

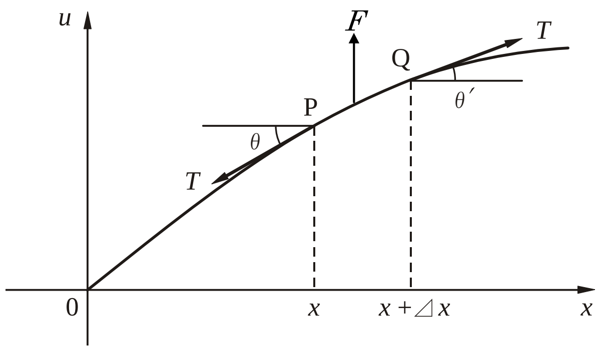
L ：弦の全長

T ：弦の張力

ρ：弦の単位長さ当たりの質量

いま，関数$u(x,t)$を，位置x，時間tでの弦の振幅とし，弦の微小部分$\overline{PQ}$について振幅方向に働く力 F について考える．図の幾何学的関係より，u方向の力の釣り合いは,

$$F = T\sin\theta' - T\sin\theta$$



ここで，弦の振幅が小さいためθ, θ'が十分に小さく，$\sin\theta \cong \tan\theta$，$\sin\theta' \cong \tan\theta'$とみなせるとする．従って,

$$F \cong T\tan\theta' - T\tan\theta$$

ここで,

$$\tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tan\theta' = \tan\theta + \Delta(\tan\theta) = \tan\theta + \frac{\partial \tan\theta}{\partial x}dx = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

であるから,

$$F = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

一方，ニュートンの法則より，微小部分$\overline{PQ}$の質量をmとすると，$m = \rho dx$であるから,

$$F = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

以上より，以下の一次元波動方程式が得られる．

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)}$$

2.　一次元熱伝導方程式

断面積 A，密度ρ，比熱 C の線材を伝わる熱と温度 u との関係を求める．熱伝導に関するフーリエの法則から，単位時間に線材を伝わる熱量$\dot{Q}$ は

$$\dot{Q} = -k\frac{\partial u}{\partial x}A \quad [\mathrm{W}] \tag{2.1}$$

ただし，k [W/(m·K)] は線材の熱伝導率である．

位置 x から入る熱量は　$\dot{Q}(x)$

位置 $x + \Delta x$ から出ていく伝熱量は　$\dot{Q}(x+\Delta x) = \dot{Q}(x) + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}\Delta x$

よって，時間 Δt の間に体積 $A\Delta x$ が得た熱量 ΔQ は

$$\Delta Q = \left\{\dot{Q}(x) - \dot{Q}(x+\Delta x)\right\}\Delta t = -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}\Delta x\Delta t \tag{2.2}$$

式（2.1）を上式に代入して

$$\Delta Q = -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}\Delta x\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}A\Delta x\Delta t \tag{2.3}$$

一方，時間 Δt の間に体積 $A\Delta x$ の温度が Δu だけ上昇したとすると，

（質量）×（比熱）×（上昇温度）＝（得た熱量）

$$\rho A\Delta x \times C \times \Delta u = \Delta Q \tag{2.4}$$

上式の右辺に式（2.3）を代入して

$$\rho A\Delta x\, C\, \Delta u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}A\Delta x\Delta t$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{k}{\rho C}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

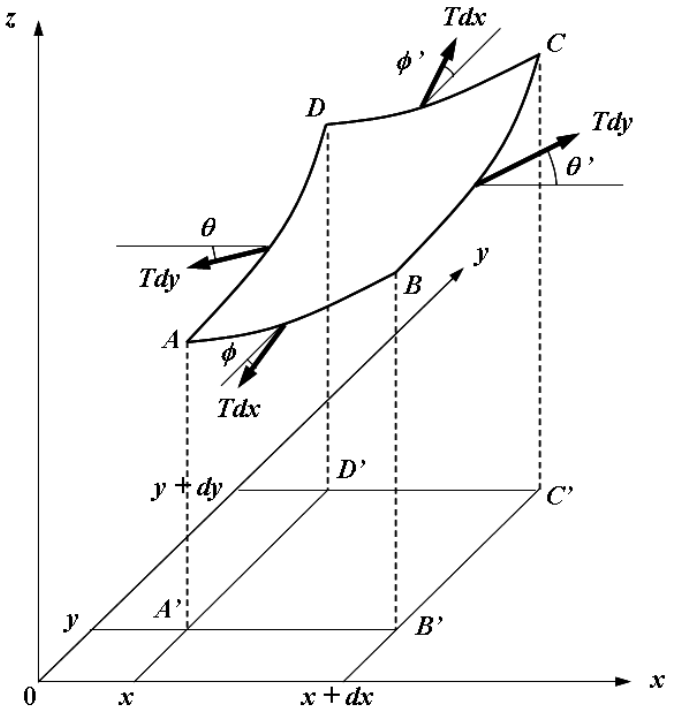
Δt を無限小にとると，以下の一次元熱伝導方程式が得られる．

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho C}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{2.6}$$

3.　二次元波動方程式（薄膜の振動）

2 次元の広がりを持つ薄い膜の振動を考えよう．膜面内にとった微小要素の各点の座標を以下のようにとる．

$$A = A(x, y),\qquad B = B(x+dx, y)$$
$$C = C(x+dx, y+dy),\quad D = D(x, y+dy)$$



膜面のたわみ角は十分に小さいものとし，$\sin\theta \cong \tan\theta$ とみなせるものとする．膜面の単位長さあたりに働く張力を T とおくと，線分 BC，AD に働く張力の z 方向成分は

$$\begin{aligned} T(\sin\theta' - \sin\theta)dy &\cong T(\tan\theta' - \tan\theta)dy \\ &= T\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\right\}dy \\ &= T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy \end{aligned}$$

同様に，線分 AB，CD に働く張力の z 方向成分は

$$\begin{aligned} T(\sin\phi' - \sin\phi)dx &\cong T(\tan\phi' - \tan\phi)dx \\ &= T\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\right\}dx \\ &= T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy \end{aligned}$$

膜の単位面積当たりの質量をρとすると，膜 ABCD の質量は $\rho dxdy$ である．膜 ABCD の加速度は $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ なのでニュートンの運動方程式から

$$\rho dxdy\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy + T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy$$

これから，以下の二次元波動方程式が得られる．

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\qquad \left(v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)}$$

4.　二次元熱伝導方程式

面積 $\Delta x\Delta y$ で単位長さの厚みをもつ密度ρ，比熱 C の物質を伝わる熱と温度 u との関係を求める．熱伝導に関するフーリエの法則から，単位時間に物質を伝わる熱量$\dot{Q}$は

$$\begin{cases} x \text{ 方向：} \dot{Q} = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta y \times 1 \ \ [\mathrm{W}] & (4.1) \\ y \text{ 方向：} \dot{Q} = -k\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta x \times 1 \ \ [\mathrm{W}] & (4.2) \end{cases}$$

ただし，k [W/(m·K)] は物質の熱伝導率である．

$$\begin{cases} \text{位置 } x \text{ から入る熱量は} & \dot{Q}(x,y) \\ \text{位置 } x+\Delta x \text{ から出ていく熱量は} & \dot{Q}(x+\Delta x,y) = \dot{Q}(x,y) + \dfrac{\partial \dot{Q}}{\partial x}\Delta x \\ \text{位置 } y \text{ から入る熱量は} & \dot{Q}(x,y) \\ \text{位置 } y+\Delta y \text{ から出ていく熱量は} & \dot{Q}(x,y+\Delta y) = \dot{Q}(x,y) + \dfrac{\partial \dot{Q}}{\partial y}\Delta y \end{cases}$$

よって，時間 Δt の間に体積 $\Delta x\Delta y \times 1$ が得た熱量 ΔQ は

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \left\{\dot{Q}(x,y) - \dot{Q}(x+\Delta x,y)\right\}\Delta t + \left\{\dot{Q}(x,y) - \dot{Q}(x,y+\Delta y)\right\}\Delta t \\ &= -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}\Delta x\Delta t + -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial y}\Delta y\Delta t \end{aligned} \qquad (4.3)$$

式（4.1）を上式右辺第 1 項へ，式（4.2）を上式右辺第 2 項へ代入して

$$\Delta Q = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta t + k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta t \qquad (4.4)$$

一方，時間 Δt の間に体積 $\Delta x\Delta y \times 1$ の温度が Δu だけ上昇したとすると，

（質量）×（比熱）×（上昇温度）=（得た熱量）

$$\rho\Delta x\Delta y \times C \times \Delta u = \Delta Q \qquad (4.5)$$

上式の右辺に式（4.4）を代入して

$$\rho\Delta x\Delta y\, C\,\Delta u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta t + k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta t$$

$$\therefore\ \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{k}{\rho C}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4.6)$$

Δt を無限小にとると，以下の二次元熱伝導方程式が得られる．

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho C}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} \qquad (4.7)$$

5. ラプラス方程式

2 次元の熱伝導方程式で，温度 u が時間に依存しないとき（時間が十分経過したとき），$\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ より

$$\frac{k}{\rho C}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$ ← 二次元ラプラス方程式

以上

★ 補足

位置 x での物理量を u とする．位置 $x + dx$ での物理量は u から微小量 du だけ増えている（du が負なら減っている）とする．すると，位置 $x + dx$ での物理量 $u + du$ は次式で与えられる．

$$u+du=u+\frac{du}{dx}dx \tag{A1}$$

$\dfrac{du}{dx}$ は u の x 方向勾配であり, x 方向に単位長さ進んだ位置での u の増加量を意味する. したがって,

dx だけ進んだ位置では $\dfrac{du}{dx}dx$ だけ増加する．これが式（A1）の意味である．