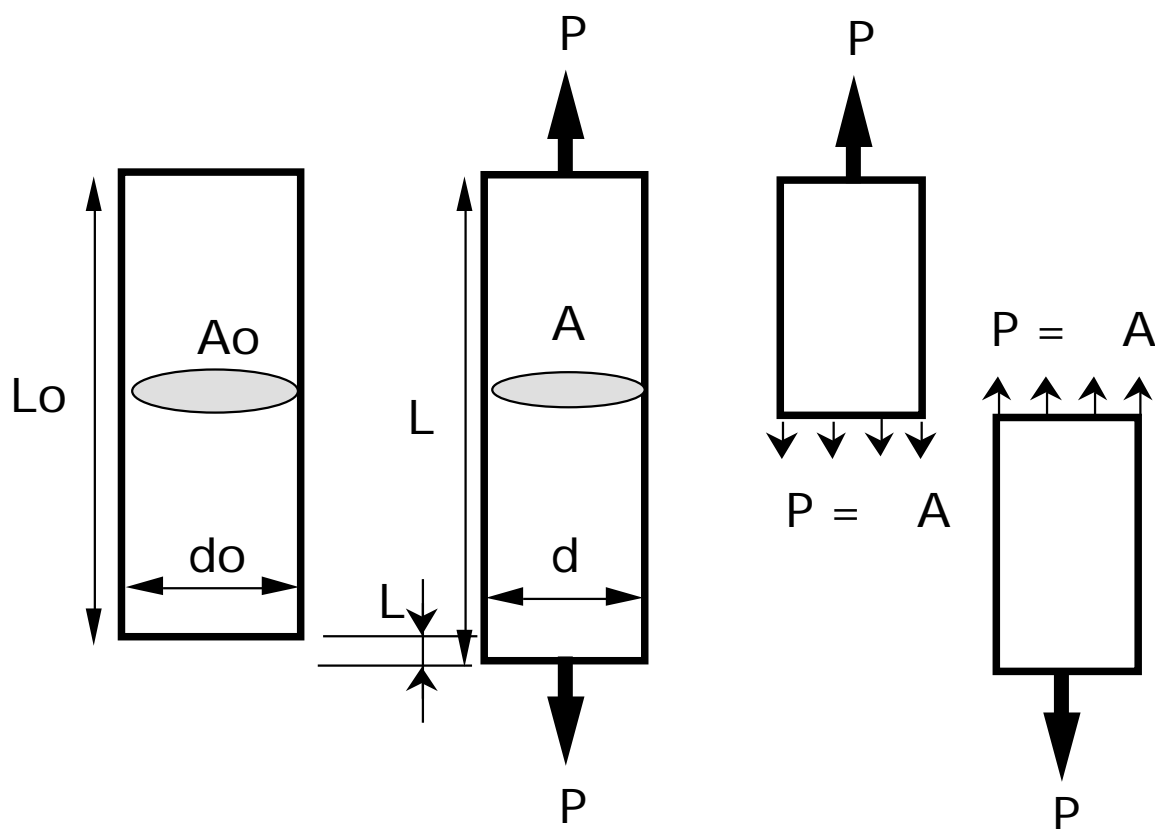


1 . 応力と歪、弾性変形

1 - 1 . 序：引張

1 - 1 - 1 . 応力 (stress) について

下図のように断面積 A_0 、長さ L_0 の材料に引張荷重 P を付加すると、材料は引張荷重の方向に伸び、それとは垂直方向に収縮する。このとき、引張軸に垂直な任意の断面で材料を切ってみることを想定すると、材料はこの切った断面で引張荷重と同等の内力が生じていなければ、切った断片は加速度運動して力学的な平衡が保てなくなる。この内力は、切断面に一様に作用しているはずであり、単位面積あたりに換算したものを応力という。



荷重付加前
長さ L_0 、面積 A_0

荷重付加後
長さ L 、面積 A

自由物体線図
(free body diagram)

図 1 .

真応力(true stress)

$$\sigma_t = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

公称応力(nominal stress)、工学的応力(engineering stress)

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (1-2)$$

1 - 1 - 2 . 歪 (strain)について

図 1 の場合では、引張荷重 P の付加によって、材料の長さは初期の長さ L_0 から L まで、 $L=L - L_0$ だけ伸びている。 L のことを伸び(elongation) という。歪は、この伸びが材料の長さに対してどれだけになるかという比で表される。

公称歪 (nominal strain) 、工学的歪(engineering strain)

$$\epsilon = \frac{L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (1-3)$$

L:変位(displacement)

真歪(true strain)

$$\epsilon_t = \int d = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{L}{L_0} \right) = \ln (1 + \epsilon) \quad (1-4)$$

1 - 1 - 3 . ポアソン比(Poisson's ratio)

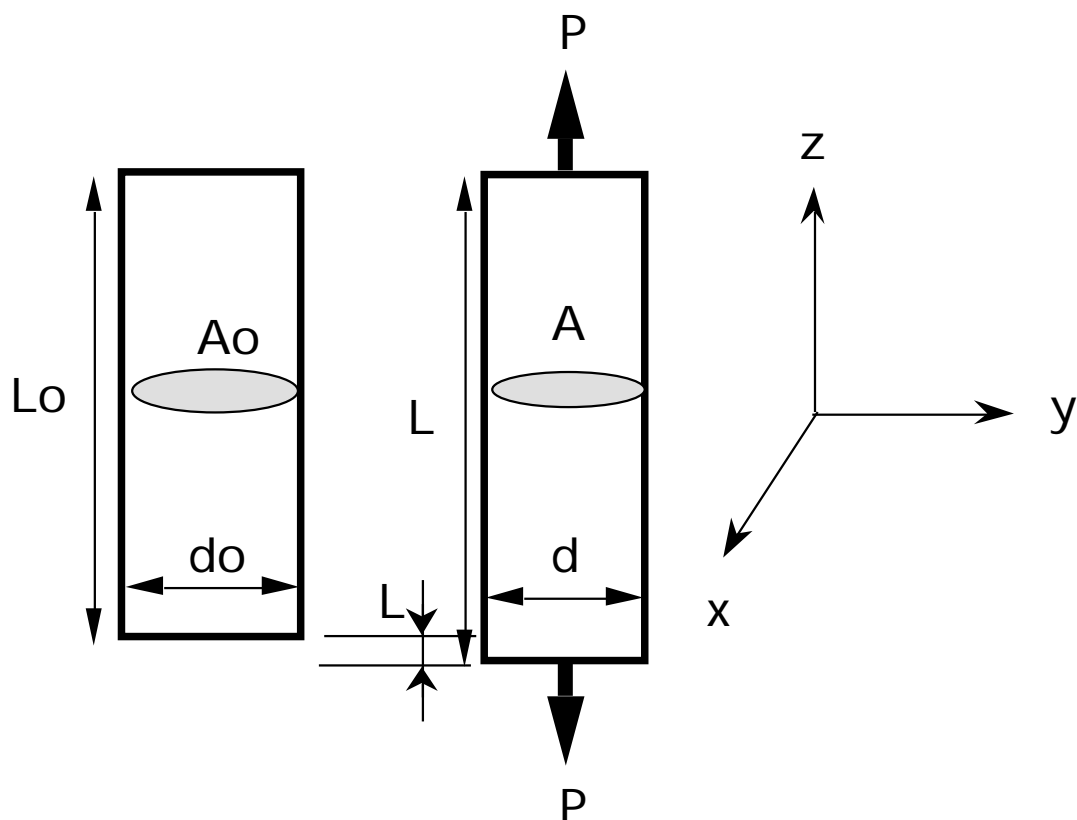


図 2 .

上図のように、 z 方向に引張の荷重を付加した材料はこの方向には伸びるが、これとは垂直な方向には収縮する。

引張荷重による z 方向の伸び歪は、

$$\epsilon_z = \frac{L - L_0}{L_0} > 0$$

(1-5)

であり、 x 、 y 方向の収縮歪は、

$$\nu = -\frac{\Delta x}{\Delta z} = -\frac{\Delta y}{\Delta z} = -\frac{d - d_0}{d_0} < 0 \quad (1-6)$$

となる。ポアソン比は、この横方向の歪と縦方向の歪の比で表される物性値である。

$$\nu = -\frac{\Delta x}{\Delta z} = -\frac{\Delta y}{\Delta z} \quad (1-7)$$

なお、(1-5)ならびに(1-6)式からわかるように、歪は伸びに対して正、収縮に対して負の値を用いる。また、応力についても引張に対して正、圧縮に対して負の値を用いる。

1-1-4 . 弾性変形とフックの法則(Hook's law)

材料に荷重を付加した場合、その荷重を除去した後にもとの形に材料が戻るような変形を弾性変形(elastic deformation)あるいは可逆変形(reversible deformation)という。

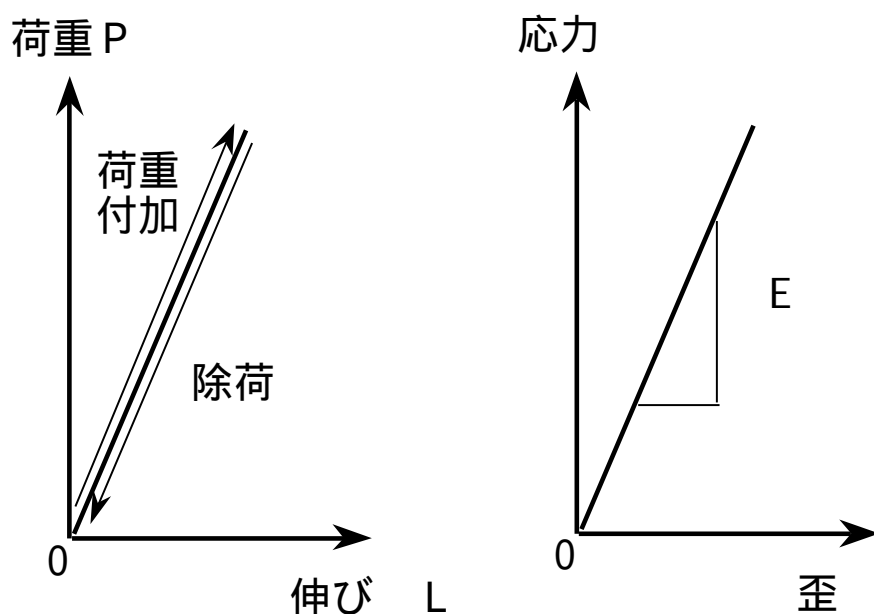


図3 . 弾性変形域の荷重－伸び曲線と応力－歪曲線

ゴムのようなエラストマーを除く金属、セラミックス材料では、弾性変形量はごく僅かであり、 A A_0 とおけるから、

$$t \quad (1-8)$$

であり、また歪についても、

$$t \quad (1-9)$$

となり、次のフックの法則が成り立つ。

$$= E \quad (1-10)$$

E : ヤング率 (Young's modulus)あるいは縦弾性係数

1 - 1 - 5 . ヤング率と原子間ポテンシャル(interatomic potential)

材料を構成する原子ならびにイオンの原子間ポテンシャルは一般に以下のような式で表すことができる。

$$V(r) = \frac{A}{r^m} - \frac{B}{r^n}, \quad m > n \quad (1-11)$$

ここで、右辺第1項は斥力、第2項は引力によるポテンシャルである(材料物性基礎ノート参照)。rは原子間の距離、指数m、nは原子間ポテンシャルの形を決め、定数A、Bは斥力、引力のポテンシャルの大きさを表している。(1-11)式は図4のようになる。図4において、原子間ポテンシャルが最小になっているところが、(絶対0 Kでの)平衡原子間距離であり、力学的平衡が成り立っている。すなわち、原子には力が作用していない状態である(図5)。原子に引張の力が作用して、原子間距離がd rだけ増加したものとすると、図5に示すように原子間ポテンシャルの位置も上昇することになる。

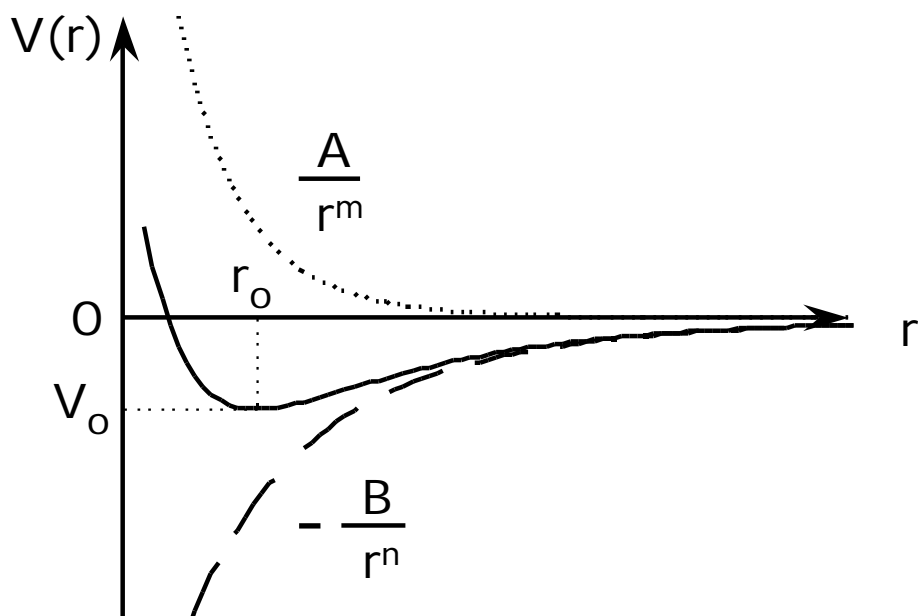


図4．原子間ポテンシャル

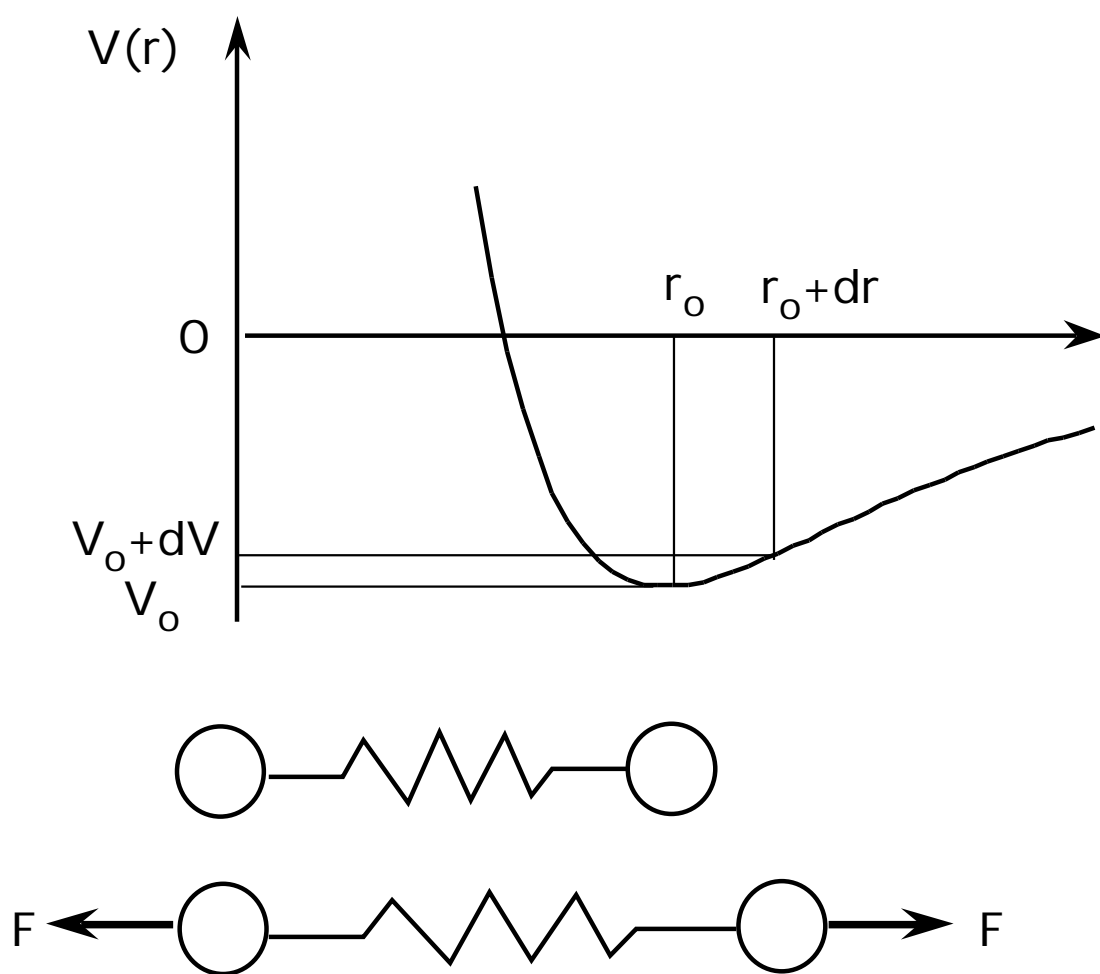


図5．原子に外力を加えた場合

外力Fのなした仕事は、原子間ポテンシャルの変化と等しいから、

$$dV = Fdr \quad (1-12)$$

であり、一方、原子間ポテンシャルを平衡原子間距離の回りにTaylor展開すると、

$$V_0 + dV = V(r_0 + dr) = V_0 + \frac{V}{r} dr + \frac{1}{2!} \frac{^2V}{r^2} dr^2 \dots \quad (1-13)$$

であり、高次の微小項を無視して、 $r=r_0$ で $dV/d r = 0$ であることに注意すると、

$$dV = \frac{1}{2} \frac{^2V}{r^2} dr^2 \quad (1-14)$$

となる。従って、外力Fは次式で表される。

$$F = \frac{1}{2!} \frac{^2V}{r^2} dr \quad (1-15)$$

両辺を r_0 で割ると、

$$\frac{F}{r_0^2} = \frac{1}{2r_0} \frac{^2V}{r^2} \frac{dr}{r_0} \quad (1-16)$$

となり、一個の原子が占める面積が r_0^2 であり、歪は $=dr/r_0$ であることから

$$= \frac{1}{2r_0} \frac{^2V}{r^2} \quad (1-17)$$

を得る。従って、次式で示されるように、材料のヤング率は、平衡原子間距離における原子間ポテンシャルの曲率に比例する（曲率半径に逆比例する）。

$$E = \frac{1}{2r_0} \frac{^2V}{r^2} \Big|_{r=r_0} \quad (1-18)$$

1 - 1 - 6 . 弾性歪エネルギー(elastic strain energy)

1 - 1 - 5 節で述べたように、材料に外力を付加して弾性変形させているとき、材料を構成する原子レベルで見ると、原子間ポテンシャルすなわち原子の一エネルギーが増加していることになる。このように、材料内で原子が正規の位置から歪んで弾性的に変形しているときに蓄えられている単位体積当たりのエネルギーを弾性歪エネルギーという。

弾性歪エネルギーは次式で与えられ、図6に示すように応力-歪曲線下の面積である。

$$U = \int \sigma \, d\varepsilon = \int E \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (1-19)$$

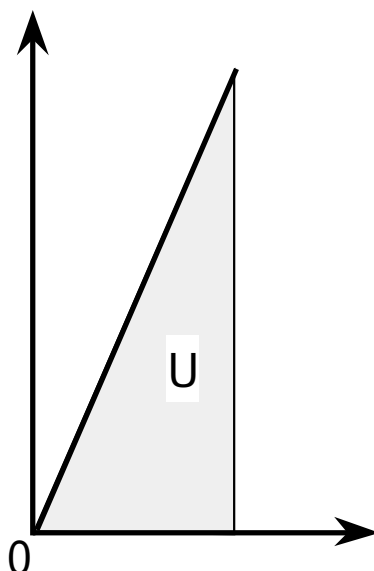


図6 . 弾性歪エネルギー

1 - 2 . せん断変形、多軸応力下の変形

1 - 1 節では、図1に示すようにまっすぐな均一断面の棒に、単軸の引張荷重を付加し

た場合について述べた。しかし、実際には材料に付加される荷重は、このように単純ではない。また図1のような単軸引張を受ける材料の強度評価においても、荷重軸と垂直な断面とは別の任意の断面上での応力を考えなければならない必要が出てくる。

1-2-1 . せん断変形

下図のように、高さ h 、上底面の面積が A の材料が床に固定されており、これにせん断力 F を作用させると右図のように変形する。

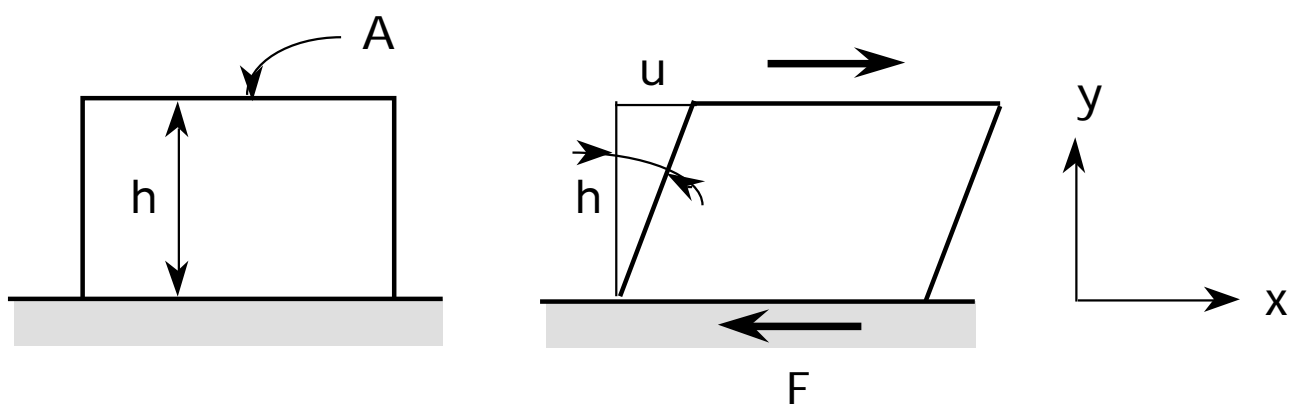


図6 . 単純せん断変形

せん断応力

$$= \frac{F}{A} \quad (1-20)$$

せん断歪

$$= \frac{u}{h} = \tan \theta = \frac{du}{dy} \quad (1-21)$$

弾性変形では、 u は h よりはるかに小さいから、

$$= \frac{u}{h} \quad (1-22)$$

であり、次のフックの法則が成り立つ。

$$= G \quad (1-23)$$

G : 剛性率(shear modulus)

剛性率 G とヤング率 E の間には以下の関係式が成り立つ。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1-24)$$

また、(1-19) 式と同様にせん断変形による弾性歪エネルギーは次の式で与えられる。

$$U = \frac{G^2}{2} = \frac{G^2}{2} = \frac{2}{2G} \quad (1-25)$$

図 6 の右図において、変形した材料中の微小体積要素について考えてみる。この微小要素を取り出した場合、力学的に釣り合いがとれていなければならない。従って、図 7 に示すように、y 軸に垂直な面に働く x 方向のせん断応

力 t_{yx} によるモーメントを打ち消すような、y 軸に垂直な面での x 方向のせん断応力 t_{xy} が生じる。モーメントの釣り合いは、

$$\left(\int t_{yx} dy dz \right) dx = \left(\int t_{xy} dx dy \right) dz \quad (1-26)$$

であるから、

$$t_{yx} = t_{xy} \quad (1-27)$$

となり、y 軸に垂直な面でのせん断応力は、z 軸に垂直な面でのせん断応力に等しい。

従って、i 軸に垂直な面での j 方向のせん断応力には、必ずそれと垂直なせん断応力が伴い、

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (1-28)$$

が成り立つ。

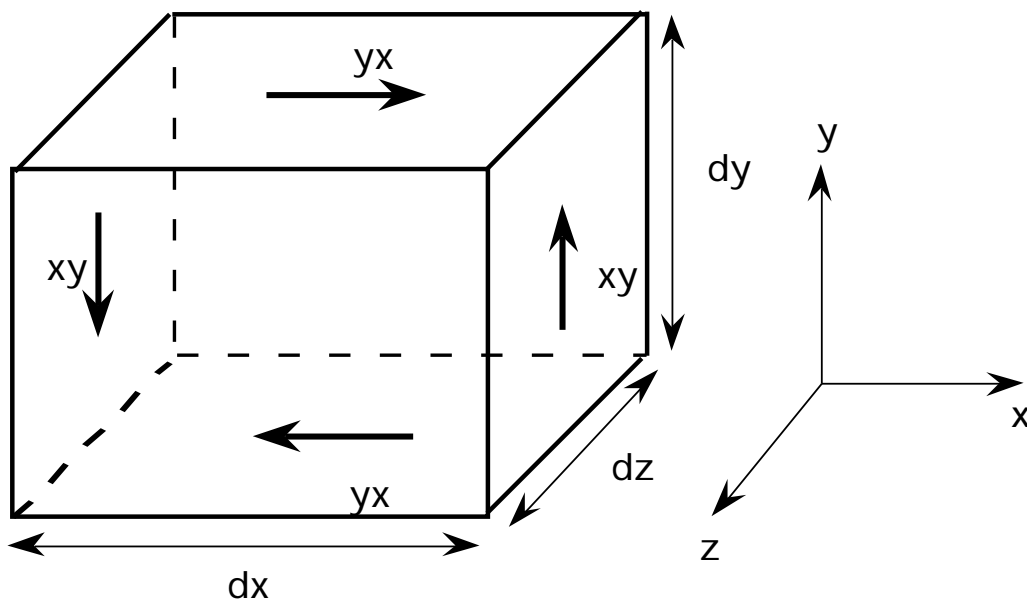


図7 .

せん断歪についてもう一度考える。直交するせん断応力が微小要素に作用するとそれに伴って、図8のように微小要素は平行四辺形の形に変形する。このとき、 x y 面内のせん断歪は以下の式で与えられる。

$$\gamma_{xy} = \cot \left\{ \frac{\alpha}{2} - \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right) \right\} = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

(1-29)

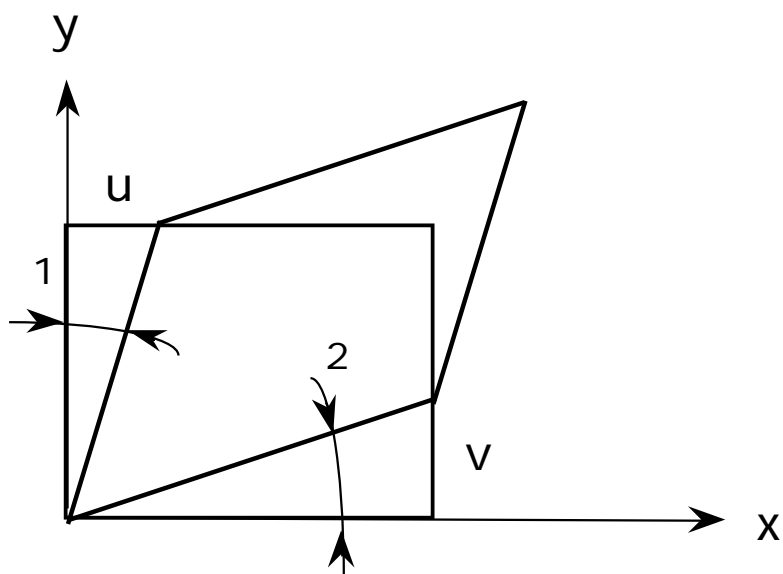


図8 . 纯粹せん断

1 - 2 - 2 . 応力の分解

図9のように、引張軸と法線が θ の角をなす断面について考えてみる。この断面の面積は、

$$A = \frac{A_0}{\cos \theta} \quad (1-30)$$

である。断面には、面に垂直な法線応力 (normal stress) と平行なせん断応力が生じ、鉛直方向の力の釣り合い、

$$A \cos \theta + P = P \quad (1-31)$$

水平方向の力の釣り合い、

$$A \sin \theta - A \cos \theta = 0 \quad (1-32)$$

が成り立たなければならない。

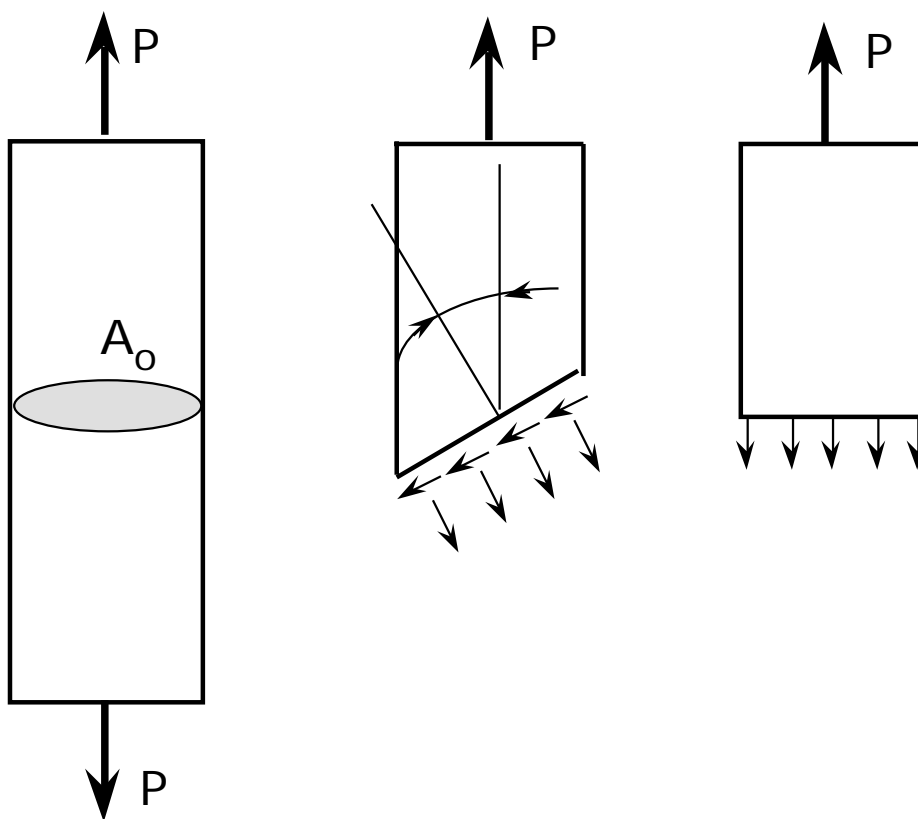


図9 .

従って、法線応力、せん断応力それぞれについて以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \left(\frac{P}{A_0} \right) \cos^2 \theta = \sigma_0 \cos^2 \theta \\
 &= \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \left(\frac{P}{A_0} \right) \sin \theta \cos \theta = \tau_0 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{1-33}$$

ここで、 σ_0 は引張軸に垂直な断面での法線応力である。

次に、微小要素に2軸応力が作用している材料中の任意の断面の応力を考える。

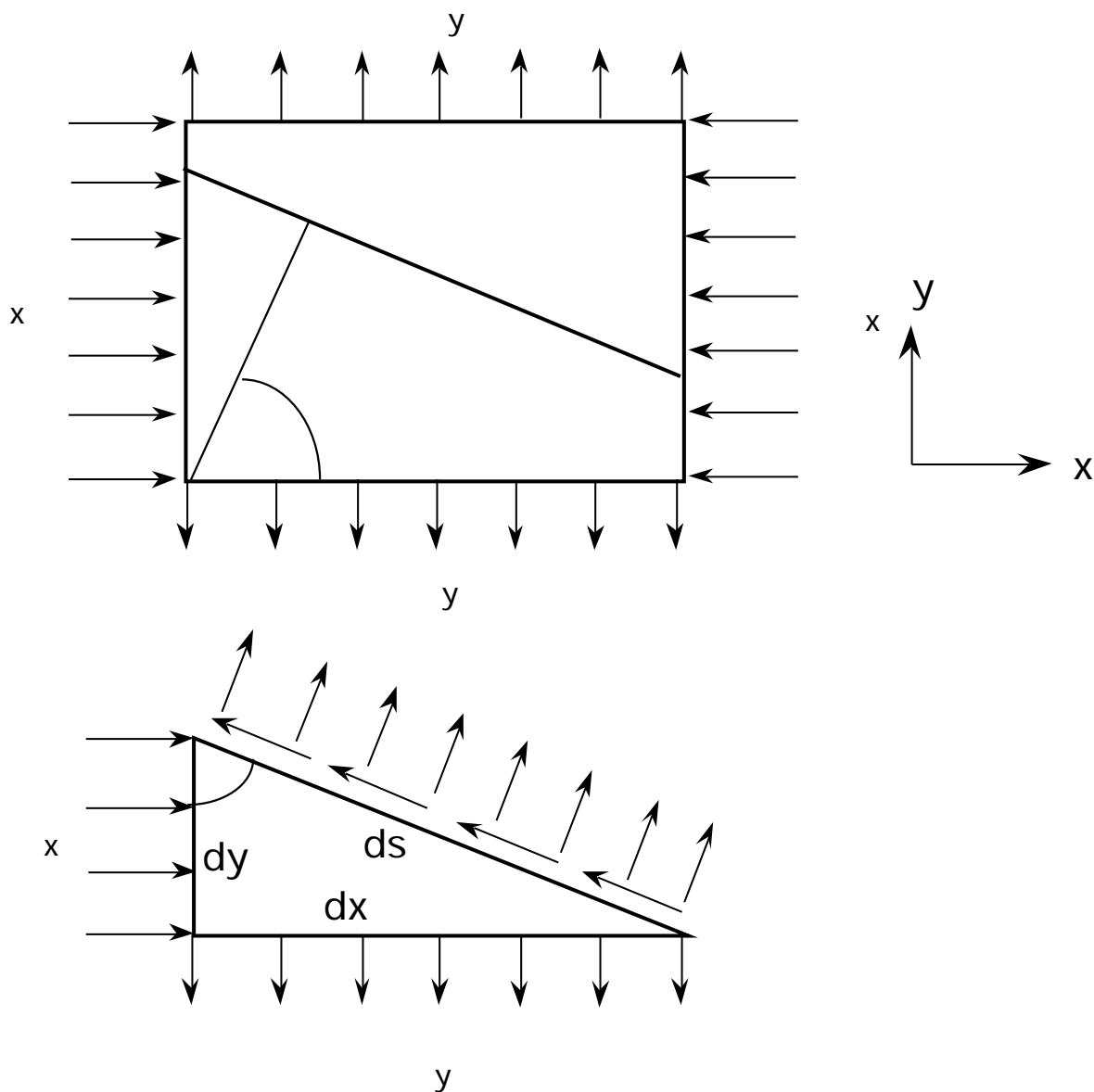


図 10 .

$$dx = ds \sin \theta, \quad dy = ds \cos \theta \quad (1-34)$$

であることに注意すると、x方向の力の釣り合い、

$$ds \cos \theta - ds \sin \theta = \sigma_x dy \quad (1-35)$$

y方向の力の釣り合い、

$$ds \sin \theta + ds \cos \theta = \sigma_y dx \quad (1-36)$$

より、

$$\begin{aligned} \cos \theta - \sin \theta &= \sigma_x \cos \theta \\ \sin \theta + \cos \theta &= \sigma_y \sin \theta \end{aligned} \quad (1-37)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1-38)$$

を得る。

1-2-3 . 静水圧的な3軸応力

辺の長さがX、Y、Zの直方体に引張の等方的な引張応力が付加され、それぞれ辺の長さがX + dX、Y + dY、Z + dZになったものとする。変形前の体積は、

$$V_0 = XYZ \quad (1-39)$$

であり、変形後の体積は、

$$V = (X+dX)(Y+dY)(Z+dZ) \quad (1-40)$$

となる(図1-1参照)。体積歪(volume strain, bulk strain)は以下のように定義される。

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_0}{V_0} \quad (1-41)$$

歪が小さい場合は、上式より

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dX}{X} + \frac{dY}{Y} + \frac{dZ}{Z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1-42)$$

このときフックの法則は以下のように表される。

$$\Delta V = K \frac{\Delta V}{V} \quad (1-43)$$

K : 体積弾性係数(bulk modulus, volumetric modulus of elasticity)

ここで、体積弾性係数は以下のように表される。

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1-44)$$

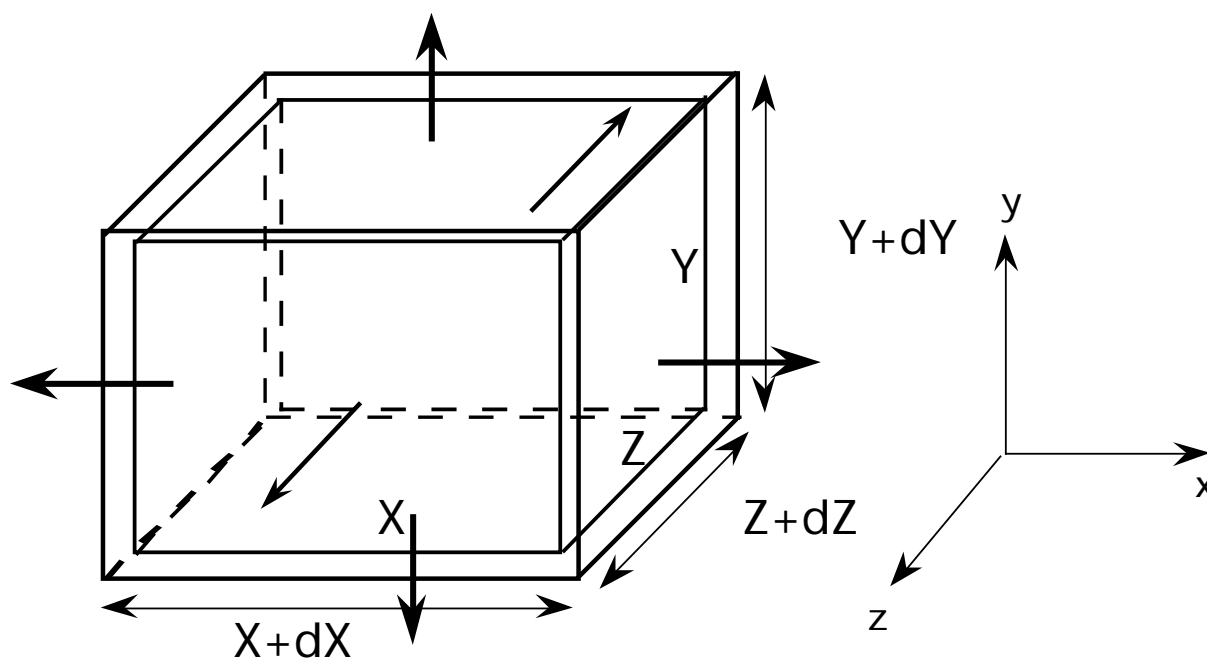


図 1 1 .