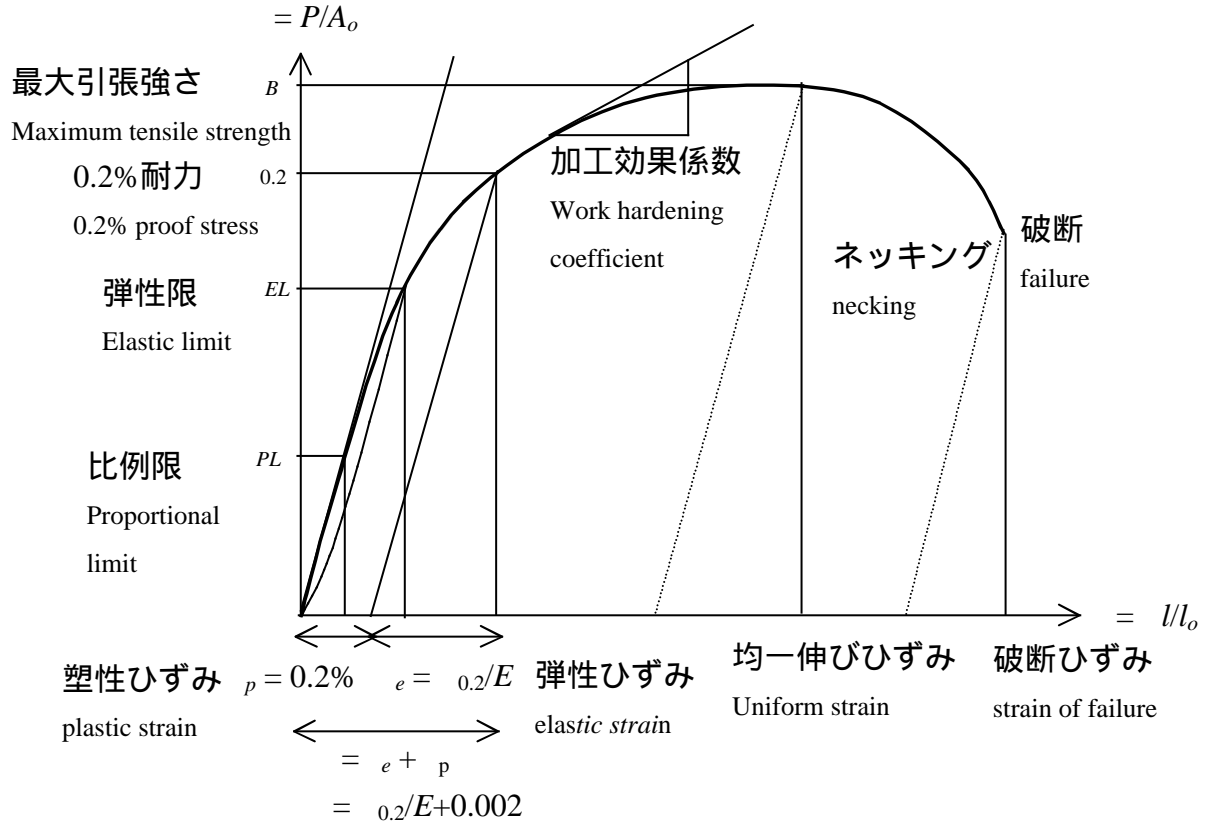


1 . 強度のパラメータと変形のモード



引張試験で得られる応力-ひずみ線図

1 - 1 . 弾性変形 elastic deformation

( 1 ) 線形弾性 linear elasticity → 比例限まで

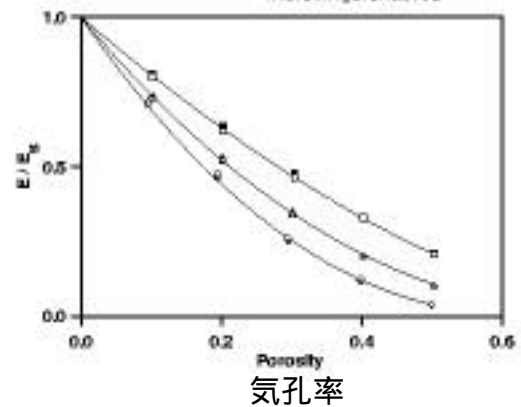
フックの法則

垂直応力 垂直ひずみ  $= E \epsilon$ 、 $E$ :ヤング率

弾性係数に及ぼす因子

- 1 ) 原子間結合
- 2 ) 組織

例) 空隙 (ポア)  
→ FEM 計算

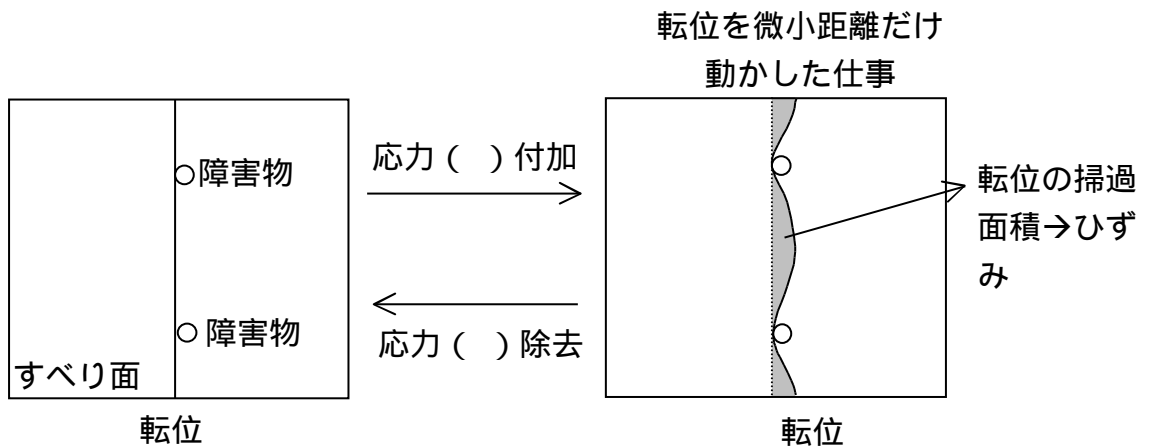


(2) 非線形弾性 (粘弾性) nonlinear elasticity → 弾性限まで

非線形性の原因

- 1) 原子間力の非線形性
- 2) 格子欠陥の微小移動に要する仕事
- 3) 組織に起因する内部摩擦

例) 転位の微小移動による内部摩擦



応力に対するひずみの応答の遅れを とすると、  
正弦波的応力変動を与えた場合、

$$\sigma = \sigma_0 \sin t, \quad \epsilon = \epsilon_0 \sin(t - \delta)$$

となる。このとき、内部摩擦の仕事は

$$W = \oint \sigma d\epsilon = \oint_{\text{cycle}} \frac{d}{dt} dt$$

である (ただし  $t$  は時間)。ここで、

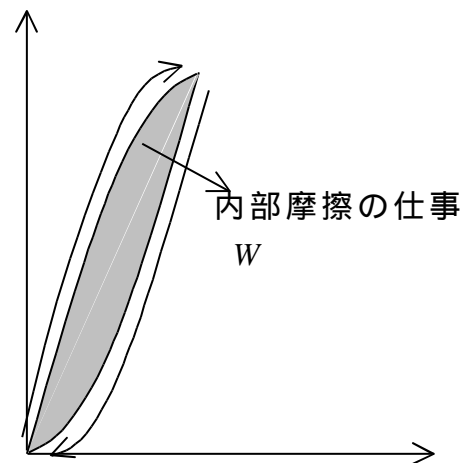
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \epsilon_0 \cos(t - \delta)$$

より、

$$\begin{aligned} W &= \oint \sigma_0 \sin t \cos(t - \delta) dt \\ &= \oint_0^{2\pi} \sigma_0 \epsilon_0 (\sin t \cos t \cos \delta + \sin^2 t \sin \delta) d(t) \\ &= \frac{\sigma_0 \epsilon_0}{2} \times 2 \sin \delta \end{aligned}$$

となる。 $W = \sigma_0 \epsilon_0 / 2$  はひずみの遅れがないときの単位体積あたりの弾性エネルギーであり、ひずみの遅れが小さいときには、

$$\frac{W}{W_0} = 2 \sin \delta$$



となる。これを減衰能という。

減衰能が大きいほど、防振性に優れる。減衰能がある材料の板をたわませて、自由振動させるとその振幅  $A$  は右の図のようになり、

$$A = A_0 \cos t \exp(- \quad t)$$

のように減衰項が加わる。これより、 $n$  番目と  $n+1$  番目の最大振幅の比をとると、

$$t_n = n$$

より、

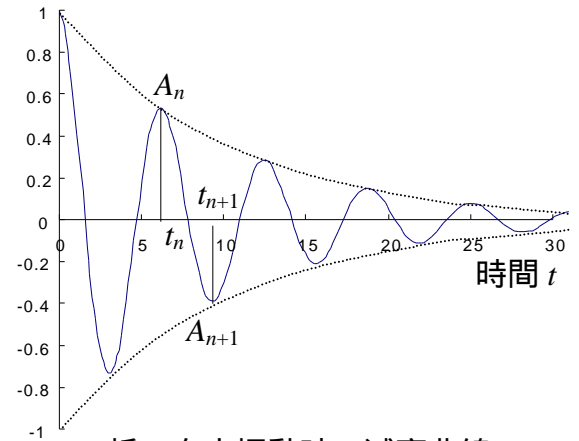
$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \exp\{ \quad (t_{n+1} - t_n) \} = \exp( \quad )$$

だから、減衰係数 は、

$$\frac{1}{\quad} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} =$$

で与えられる。減衰は変形の遅れによってもたらされるから、 $\quad =$  である。

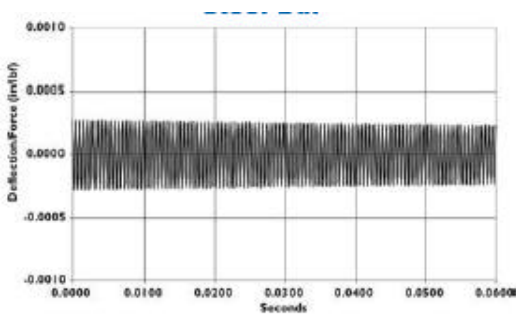
振動の振幅  $A(t)/A_0$



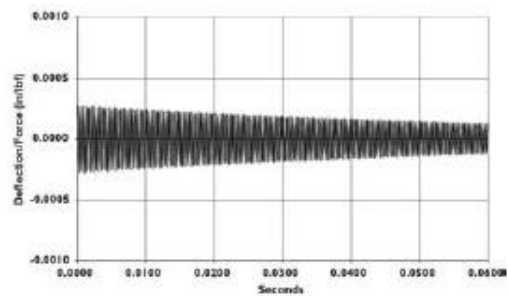
板の自由振動時の減衰曲線

例) 鉄系合金の制振性をもたらす組織

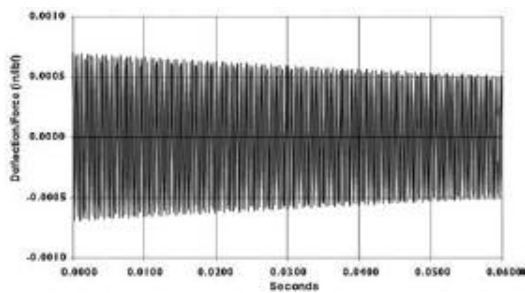
- 1) 磁区
- 2) マルテンサイト相
- 3) 鋳鉄——グラファイト相
- 4) 軟らかい相 (ポリマーなど) を含む複合組織



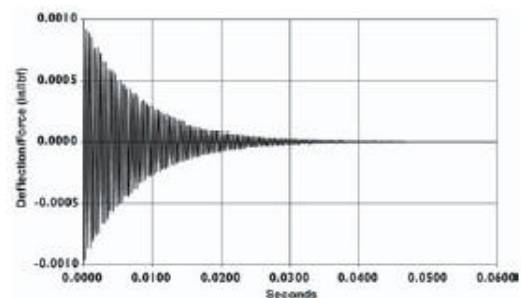
鋼



鋳鉄



アルミニウム



高分子複合材料



よって、原子間力による応力を  $b$  の周期関数と見なして、

$$atom = \max \sin \frac{2x}{b}$$

とすると、 $x \ll b$  のとき、

$$atom \approx \frac{2}{b} \max x$$

を得る。先に得たフックの法則と比較すると、

$$\max = \frac{G}{2} \frac{b}{d}$$

となる。面心立方晶金属では、すべり面は  $\{111\}$  面であり、すべり方向は  $\langle 110 \rangle$  方向であるので、 $d$  は  $\{111\}$  面間の距離、 $b$  は  $\langle 110 \rangle$  方向の最近接原子間距離をとればよい。結晶の幾何学的関係より、

$$d = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{b}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad 0.61$$

となるから、理想せん断強度は

$$\max = \frac{G}{10}$$

となる。他の結晶構造についても、すべり面間隔、すべり方向の原子間距離を用いて計算すればよい。

非晶質金属（アモルファス金属、金属ガラス）は、合金化により結晶の核生成を遅くし、かつ、結晶の核生成が生じるよりもっと早く、液体から固体へと急冷することによって得られる。このようにして得られるアモルファス金属の降伏強度は数 GPa であって、弾性係数の 1/10 ~ 1/100 程度の大きな強度が得られる。

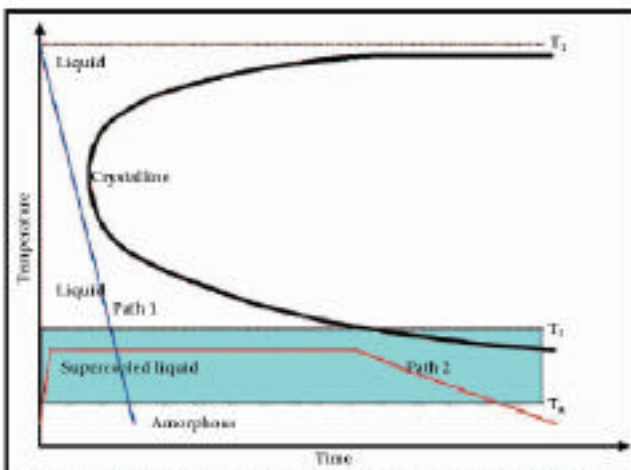
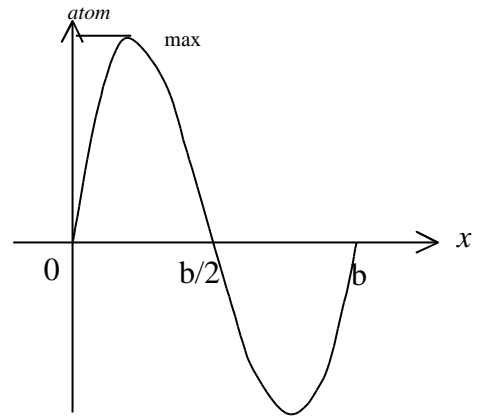


Fig. 2 — Schematic time-temperature-transformation diagram. During any processing, the crystallization nose has to be avoided. Direct casting is carried out by means of Path 1, where the liquid is cooled fast enough to avoid the crystallization nose. On the other hand, material is superplastically formed (SPF) by reheating amorphous “feedstock” material into the supercooled liquid region. During this two-step process, fast cooling and forming can be decoupled.

### Properties of selected Liquidmetal alloys

Property	Zr-based	Pt-based	Au-based
$T_g, ^\circ\text{C}$	350	230	130
$T_m, ^\circ\text{C}$	-600	-500	-400
$\sigma_y, \text{MPa}$	2000	1470	-1200
Hv 560	400	360	
$\epsilon_{el}, \%$	2	1.5	1.5
$Y, \text{GPa}$	95	95	74
$K_{IC}, \text{MPa m}^{1/2}$	40	80	—
$T_{\text{casting}}, ^\circ\text{C}$	800	650	550
$T_{\text{SPF}}, ^\circ\text{C}$	380 to 470	250 to 300	150 to 190

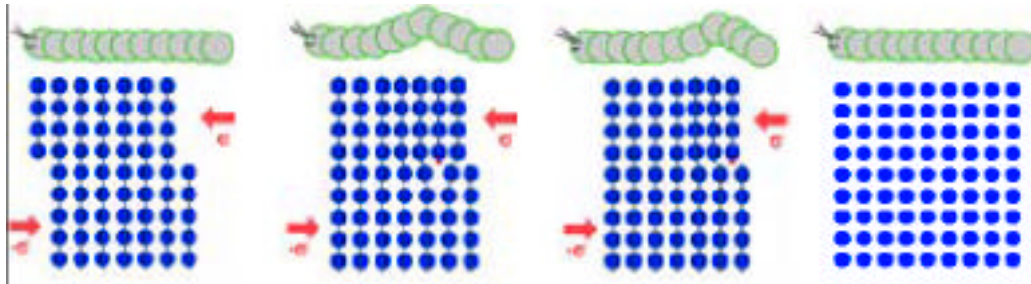
$T_g$  is the glass transition temperature, at which the amorphous phase melts into the liquid. It represents an upper limit for the service temperature.

$T_m$  represents the melting temperature,  $\sigma_y$  the yield strength, Hv the Vickers hardness,  $\epsilon_{el}$  the elastic strain limit,  $Y$  the Young's modulus,  $K_{IC}$  the fracture toughness,  $T_{\text{casting}}$  the casting processing temperature, and  $T_{\text{SPF}}$  the processing temperature region for SPF.

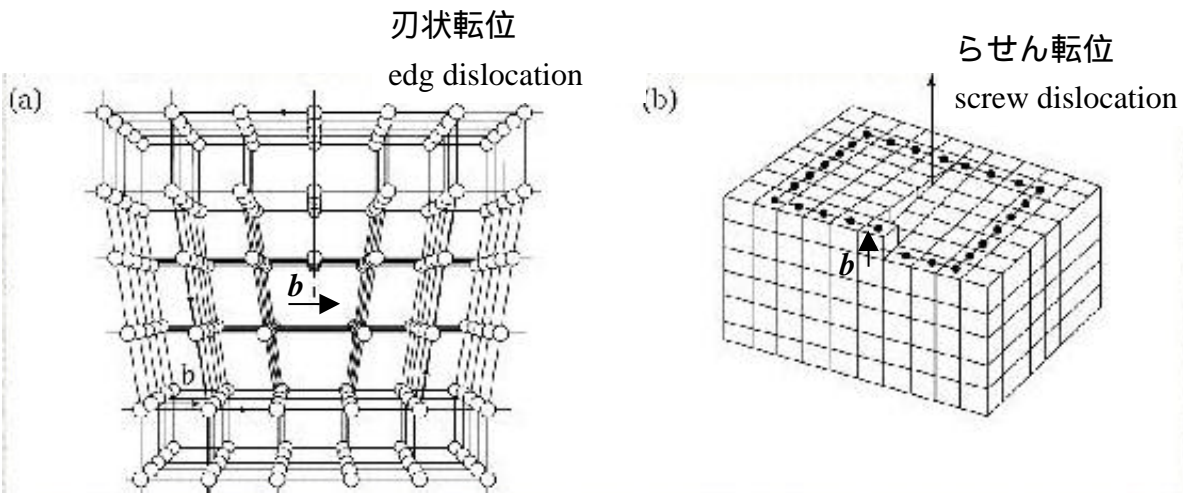
### アモルファス金属創製の TTT 線図

( 3 ) 転位 dislocation

実際の結晶の降伏強度  $\sigma_y$  は、理想せん断強度よりもはるかに小さい。これは下にあるように、すべり面の上下の原子列が一斉にせん断変位するのではなく、局所的にひずんだ線状の格子欠陥である転位が形成され、理想せん断強度よりも低い外部応力で、すべり面上を運動するためである。

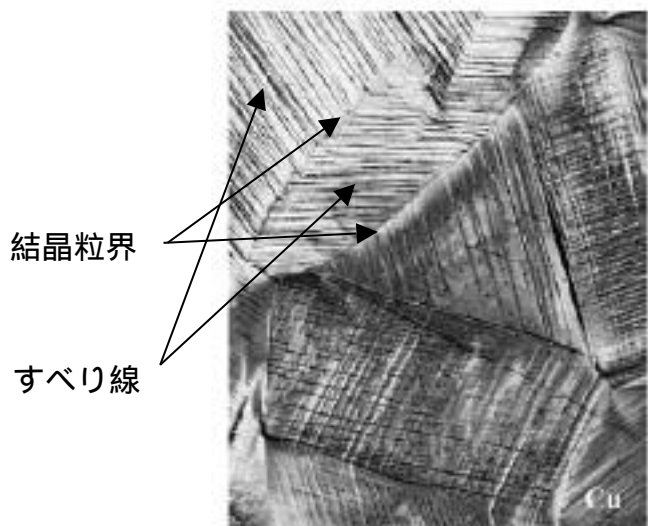


転位には下に示すように刃状転位 ( edge dislocation ) とらせん転位 ( screw dislocation ) がある。それらのもっているせん断変位はそれぞれ  $b$  であり、バーガースベクトルという。刃状転位では、 $b$  はすべり面と転位線のなす面に含まれて転位線と垂直であるのに対し、らせん転位では  $b$  は転位線と平行である。



【すべり線と結晶粒界】

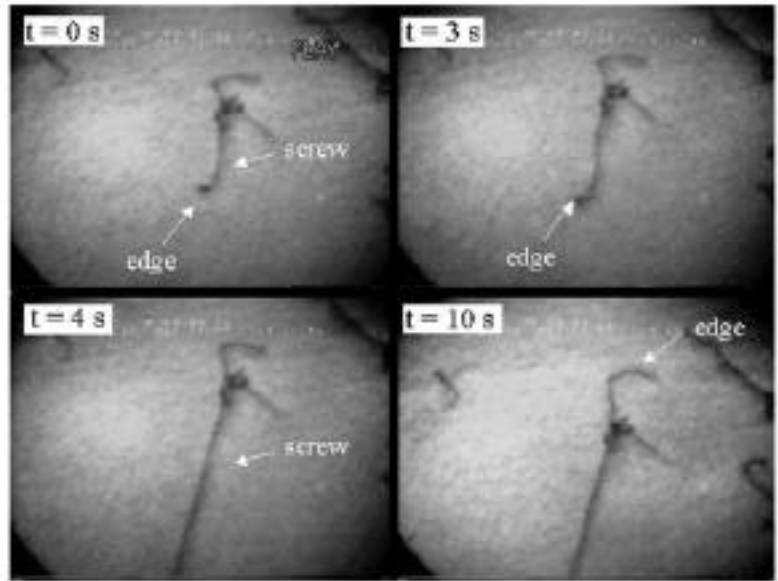
このような転位が結晶を横断して表面にでると、すべりの段ができる。右は銅多結晶を変形後に表面に形成されたすべり線である。すべり面と結晶表面の交線にそってすべり線は形成されることがわかる。このすべり系はいずれも  $\{111\}\langle 110 \rangle$  であり、すべりは結晶粒界によって阻止されていることがわかる。





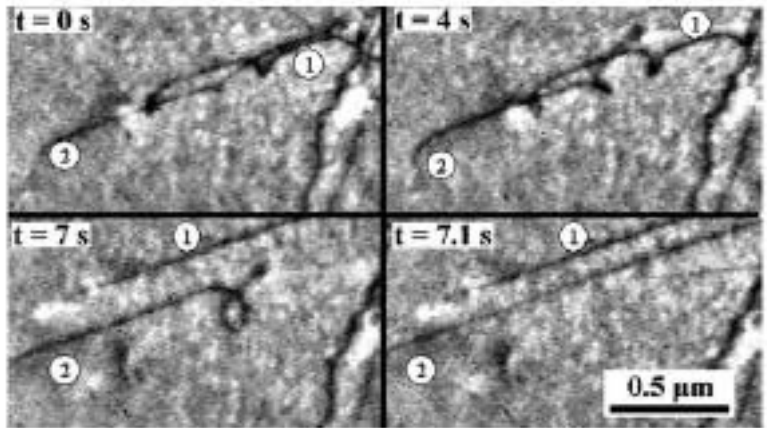
【刃状転位とらせん転位】

右図は、透過電子顕微鏡で観察された、体心立方晶のモリブデン薄膜内の転位の運動の様子であり、edge は刃状転位、screw はらせん転位を示す。転位はそのまわりにひずみをもっているために、母相を電子線の回折条件にあわせると、これからずれた影を映し出す。体心立方晶金属ではらせん転位の速度が著しく遅く、低温での脆性の原因となる。



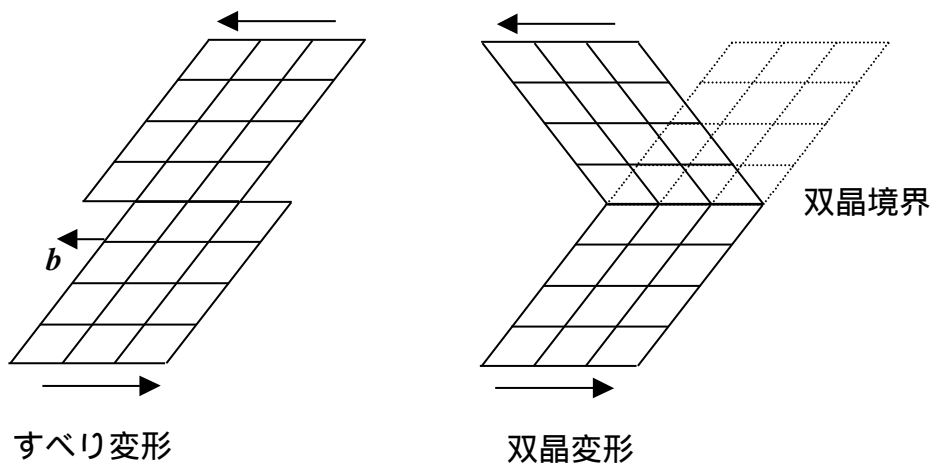
【転位と障害物】

右図は、モリブデン薄膜内で、転位が障害物に引っかかり、これ乗り越えていく過程を示した透過電子顕微鏡写真である。転位1を見るとわかるように、障害物に引っかかると転位線は屈曲し、乗り越えていった際には真っ直ぐになっている。

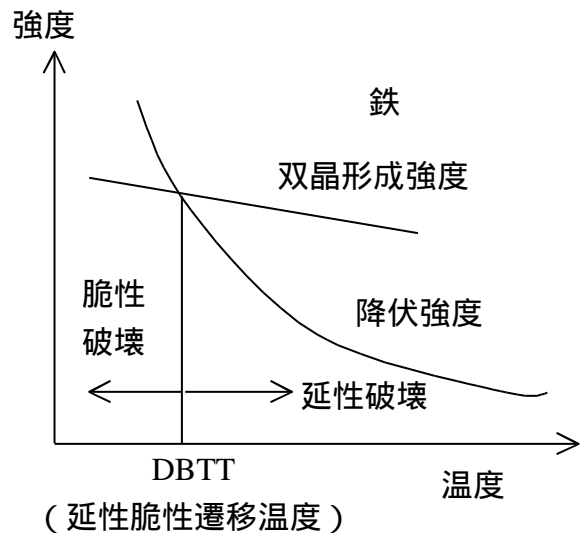


( 4 ) 双晶変形 deformation by twinning

下図のように、転位の形成と運動によるすべり変形とは異なり、ある原子面を境にして協同的な原子のせん断変位が生じ、その面の上下で原子配置が鏡像の関係になるような変形を双晶変形という。形成された双晶 (twin) は、機械的双晶 (mechanical twin) とも呼ばれる。

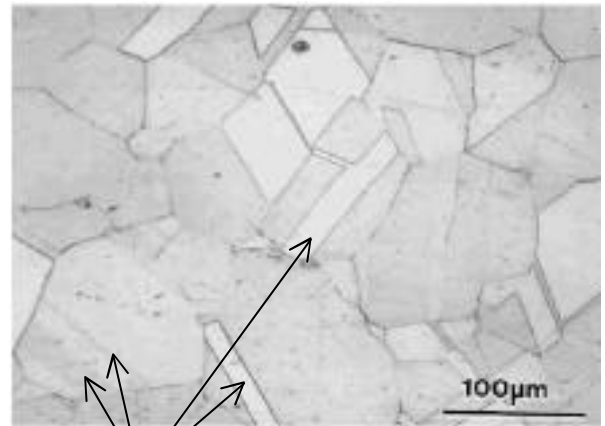


機械的双晶は、結晶においてすべり変形を担う転位の速度が、外部から付加された変形速度に追いつけないような場合に生じる。模式図に描いたように、双晶変形に伴うせん断変位（あるいはせん断ひずみ）は大きいいため、双晶が結晶粒界にぶつかったり、あるいは双晶同士がぶつかったり、また、表面にでた場合にはき裂が形成される。このため、鉄においては転位のすべりが困難となる低温で降伏強度が上昇し、双晶形成に必要な応力を上回って双晶が形成されると、脆性破壊をもたらす原因の一つとなる。



参考【焼鈍し双晶 annealing twin】

金属を焼鈍すると双晶が形成される。これは、双晶境界のエネルギーが大きく傾いた結晶粒界よりもはるかに小さいので、結晶のエネルギーを小さくするように双晶境界の導入が好まれるためである。このような双晶のことを焼鈍し双晶という。



焼鈍し双晶 (Ni 基超合金)

2. 転位論初歩

2-1. 転位を動かす力

すべり面上にのせん断応力が作用するときに、長さ  $l$  の転位が  $x$  だけ運動したものとす。このとき、すべり面の上下で原子は  $b$  だけ変位するので、転位の運動によって移動した物質の体積は  $V = lxb$  である。よって、転位がなした仕事は、

$$W = V = lxb$$

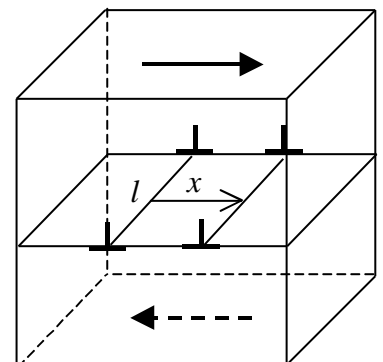
で与えられる。一方、転位に働く力を  $F$  とすれば、この仕事は

$$W = Fx$$

となる。これらの仕事は等しいから、転位に働く力は、

$$F = lb$$

であり、単位長さあたりに働く力を  $f$  とすると、





$$f = \frac{F}{l} = b$$

で表される。

## 2—2 . 転位の周りの応力場とひずみエネルギー

転位のまわりには応力場が形成され、転位からの距離を  $r$  とすると、

$$\sigma_{ij} = \frac{Gb}{2K} \frac{f_{ij}(\theta)}{r}$$

で表される。ここで重要なことは、転位の応力場が距離に反比例するという点である。らせん転位の場合  $K=1$  であり、刃状転位では  $K=1-\nu$  である ( $\nu$  : ポアソン比)。  $f_{ij}(\theta)$  は、応力成分によって異なる転位からの角度  $\theta$  の関数である。らせん転位では、

$$\sigma_z = \sigma_{\theta z} = \frac{Gb}{2r},$$

のせん断応力のみがあり、他の応力成分は全て 0 である。またひずみも、  $\epsilon_z = \epsilon_{\theta z} = \frac{b}{4r}$  となる。これより半径  $R$  の丸棒の中心にあるらせん転位のひずみエネルギー ( strain energy ) は、単位長さあたり

$$E_e^{screw} = \int_{r_0}^R \left( \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2} + \frac{\sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z}}{2} \right) 2\pi r dr = \frac{G^2 b^2}{4} \ln \frac{R}{r_0}$$

となる。ただし、積分の下限値  $r_0$  は、転位芯では原子配列が乱れており弾性論を使うことができないため、転位芯をくりぬいた半径である。

刃状転位についても同様に応力成分、ひずみ成分からひずみエネルギーを導出できる。ここでは結果のみを記す。

$$E_e^{edge} = \frac{G^2 b^2}{4K} \ln \frac{R}{r_0}$$

半径  $R$  は、加工した材料では通常転位間の間隔を取る。また結晶中の転位は刃状、らせんが入り交じっているため、おおよそ、転位のひずみエネルギーは単位長さあたり

$$E_e \approx \frac{G^2 b^2}{2}$$

としてよい。

## 2—3 . 転位の線張力 line tension

長さ  $l$  の直線状の転位が、たわんで  $l + \Delta l$  の長さになったとする。このときのエネルギーの増分は

$$E_e = E_e(l + \Delta l) - E_e l = E_e \Delta l$$

で表される。転位が長くなったことにより結晶のエネルギーは増加するが、系はエネルギー

ギ一が最小となる方向に向かおうとする。このため、転位に沿って転位線を短くするような力、すなわち線張力  $T$  が働く。線張力  $T$  によって転位が  $l$  だけ縮むときになされる仕事は、

$$W = T l$$

であり、これは上で計算したエネルギーの増分に等しい。よって、線張力は

$$T = E \frac{Gb^2}{2}$$

となる。

#### 2—4 . 転位に働く力と線張力の釣り合い

右の図のように、せん断応力  $t$  が作用しているすべり面上を転位が移動する際に、間隔  $l$  の障害物にぶつかり、その間で転位が湾曲したものとす。この湾曲の半径を  $R$ 、角度を  $2\theta$  とす。長さ  $l$  の転位素片に作用する力は

$$F = bl$$

である。一方、転位素片の接線方向に働く線張力のうち、 $2T\sin\theta$  が下向きに作用している。よって、転位素片に働く力の釣り合いは、

$$F = 2T\sin\theta$$

であるから、外部せん断応力は

$$= \frac{2T}{bl} \sin\theta = \frac{Gb}{l} \sin\theta$$

で表される。このうち  $\sin\theta$  は障害物の抵抗力を表す因子であり、 $\theta = 90^\circ$  で  $\sin\theta = 1$  のときがもっとも大きな抵抗となる。このことから以下のようなことが言える。

1) 転位が乗り越えていくことのできる合金原子、小さな析出物、すべり面を貫く転位 (林転位 forest dislocation) の場合

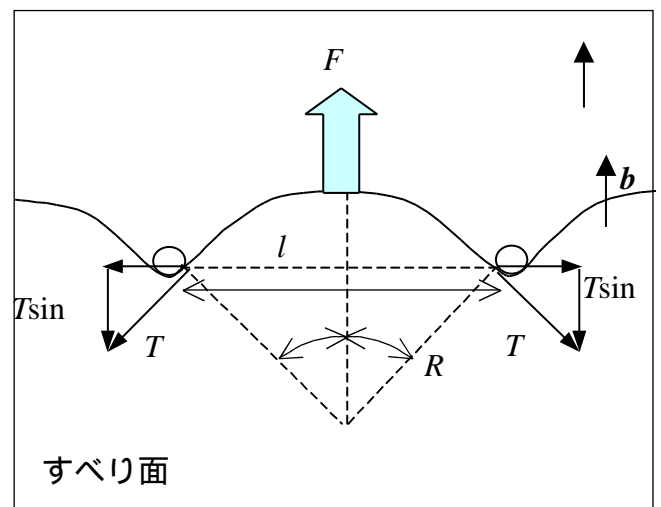
$$= \frac{Gb}{l} \sin\theta$$

2) 転位が乗り越えていくことができない大きな析出物、硬い分散粒子の場合

$$= \frac{Gb}{l}$$

となり、障害物の抵抗力に差があり、また転位と障害物との相互作用にも違いがあるが、どの場合でも、障害物の間隔が短いほど強度が高くなる。

#### 3 . 延性材料 ( ductile material ) の強度に与える因子



これまで述べてきたように、強度には様々な因子が作用する。大まかにまとめると、

- 1) 転位の運動に対する結晶の地の抵抗 ( $\sigma_i$ )
- 2) 合金元素や析出物、分散粒子による抵抗 ( $\sigma_{ob}$ )
- 3) 変形によって導入された他の転位による抵抗 ( $\sigma_{dis}$ )
- 4) 結晶粒界による抵抗 ( $\sigma_{gb}$ )

である。実在の金属結晶においてはこれらの要因が重なって強度を決める。ごく単純にかつ安易にこれらの抵抗を重ね合わせてよいと仮定すると、材料の強度は、

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_{ob} + \sigma_{dis} + \sigma_{gb}$$

となる。単位面積の表面に顔を出す転位の数を転位密度 (dislocation density) という。加工によって導入された転位の間隔を  $l_{dis}$  とすると、転位密度 との関係は、

$$l_{dis} = \frac{1}{\rho}$$

である。また、結晶粒界の抵抗に関しては、結晶粒径を  $D$  とすると、

$$\sigma_{gb} = \frac{k}{\sqrt{D}}$$

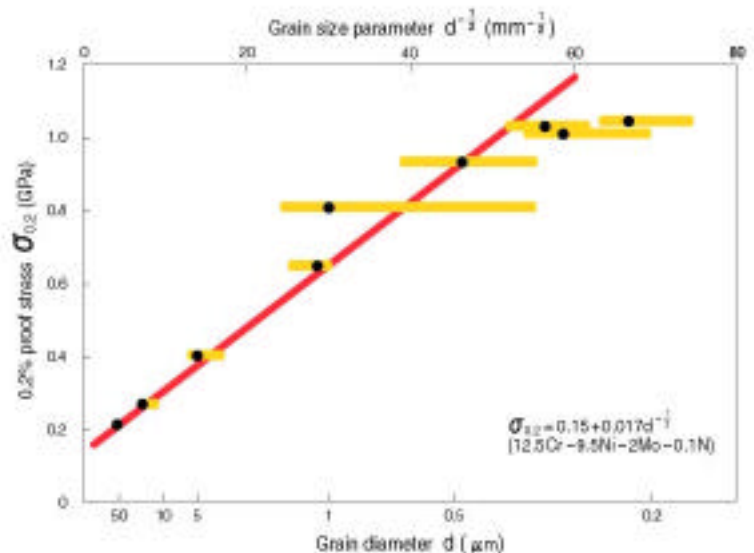
が成り立つことが知られている。 $k$  は粒界抵抗の強度因子である。以上より、

$$\sigma = \sigma_i + \frac{Gb}{l_{ob}} + Gb\sqrt{\rho} + \frac{k}{\sqrt{D}}$$

を得る。ここで、 $l_{ob}$  は障害物の間隔、 $G$  は係数である。また、右辺第1項から第3項までをまとめて結晶粒内の抵抗  $\sigma_o$  とすると、いわゆるホール・ペッチ則

$$\sigma = \sigma_o + \frac{k}{\sqrt{D}}$$

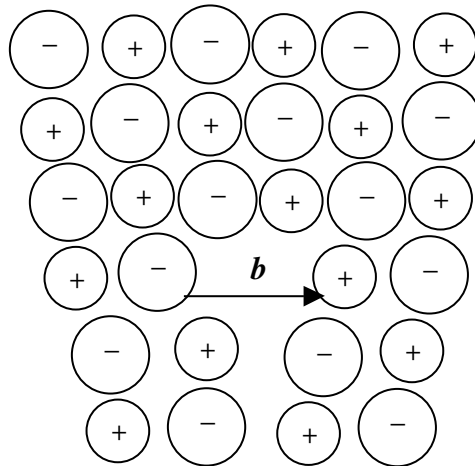
が成り立つ。近年では、材料組織の微細化を目指し、結晶粒径をナノのレベルまで小さくしているが、結晶粒径が 100 nm 以下になると、上記の法則が成り立たない例が多く報告されている。



## 4 . 脆性材料 ( brittle materials ) の強度

### 4 — 1 . 理想破壊強度

アルミナ (  $\text{Al}_2\text{O}_3$  )、ジルコニア (  $\text{ZrO}_2$  )、炭化ケイ素 (  $\text{SiC}$  )、窒化ケイ素 (  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ) などのセラミック材料は、室温で殆ど伸びずに脆性破壊する。このようなセラミック材料の脆性は、原子間結合が強いために転位の運動が困難であることに起因する。また、金属とは違い、右図に描いたように、転位が運動した後のすべり面上下の陽イオンと陰イオンは必ず対にならなければならないから、バーガースベクトル  $b$  が大きくなる。転位のひずみエネルギーは  $b^2$  に比例するので、金属の場合の数倍のエネルギーが転位形成に必要となる。以上のことより、セラミック材料では塑性変形が生じにくい。



体心立方晶で高融点金属のタングステンも室温では脆性破壊する。先に述べたように、体心立方晶金属ではらせん転位の運動が低温になるほど困難となり、鋼も低い温度では脆性破壊を示す。

次に、脆性破壊における理想強度を求める。この場合も、原子間の応力を周期の正弦波関数と見なして

$$F_{\text{atom}} = F_{\text{max}} \sin \frac{2\pi x}{d}$$

と単純化する。  $x \ll d$  のときには、

$$F_{\text{atom}} = F_{\text{max}} \frac{2\pi x}{d}$$

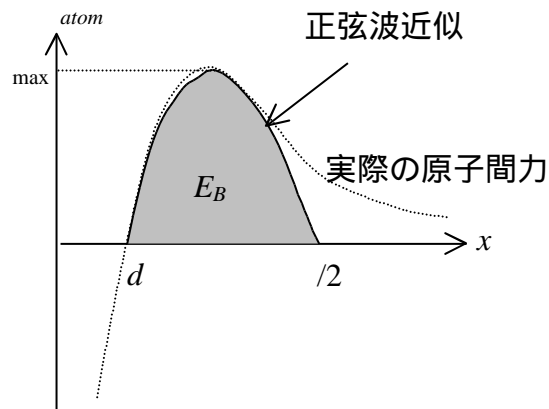
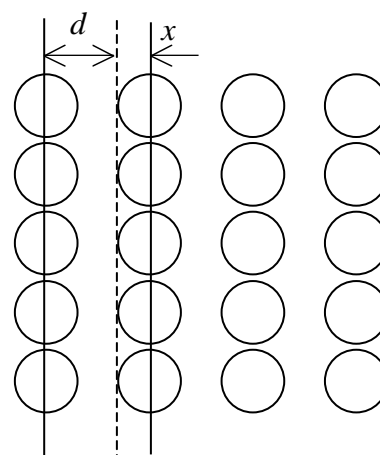
である。一方、フックの法則より外部付加応力とひずみは、原子間距離を  $d$  とすると

$$F = E \epsilon = E \frac{x}{d}$$

となり、原子間の応力と外部付加応力はつりあうことから、

$$F_{\text{max}} = \frac{E}{2} \frac{d}{d}$$

を得る。  $d$  と見なして良いと仮定すれば



$$\max \frac{E}{2} \frac{E}{6}$$

となる。これが原子が一様に離れていく際の理想強度である。

あるいは、我々はもう少し厳密な考え方ができる。 $x = 0 \sim \frac{1}{2}$ の間で  $\sigma_{atom} = 0$  であるから、 $\frac{1}{2}$ までが原子間力によって原子間の結合が保たれていることになる。よって、単位面積あたりの原子間の結合エネルギー  $E_B$  は、

$$E_B = \int_0^{\frac{1}{2}} \sigma_{atom} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi x}{d} dx = \frac{\max}{2}$$

である。原子間の結合が切れると、二つの表面が形成されるので、単位面積あたりの表面エネルギーを  $\gamma_s$  とすれば、 $2\gamma_s = E_B$  である。これより、

$$\frac{\max}{2} = 2\gamma_s$$

となる。これを用いて、先のフックの法則から導かれた  $\max$  の式における  $\sigma$  を消去すると、

$$\max = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{d}}$$

を得る。

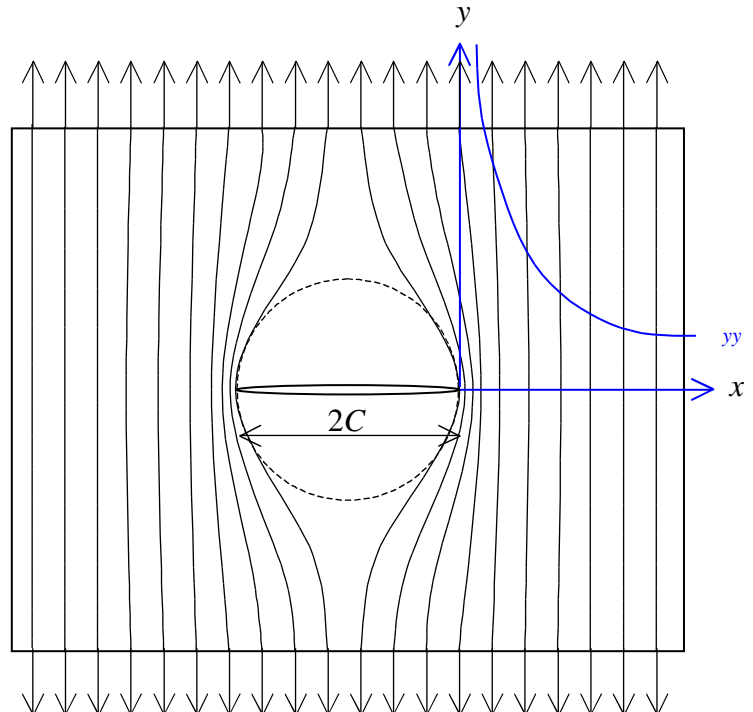
#### 4-2. 実際の破壊強度

実際のセラミック材料の破壊強度は、前説で与えた理論破壊強度よりもはるかに小さい。セラミック材料は原料粉末を焼結して作られるが、その際に形成される空隙などの内部欠陥、表面にある傷等が応力集中源となりえる。

今、右図のように、厚さ  $t$  の無限大の大きさの板内に、板を貫く長さ  $2C$  のき裂があるものとする。この材料に遠方から応力  $\sigma$  を付加した場合、き裂表面では応力を伝達しないため、応力の伝達線はき裂を迂回し、き裂先端部に集中する。このとき、き裂先端から  $x$ 、 $y$  軸を図のようにとると、き裂先端近傍の応力集中は、

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_I = \sigma\sqrt{C}$$

で代表される。ここで  $K_I$  は応力拡大係数といい、下付き添え字の  $I$  は、このき裂が開口型



のモード I であることを示している。

破壊の条件に対する一つの考え方は、き裂先端での応力が理想破壊強度を越えるというものである。すなわち、き裂先端から原子間距離  $d$  だけ離れた位置での  $\sigma_{yy}$  が、先に求めた理想破壊強度以上であればよい。よって、

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2d}} \sqrt{\frac{E_s}{d}}$$

より、実際の破壊強度を  $\sigma_f$  とすると、 $K = \sigma_f \sqrt{C}$  だから、

$$\sigma_f \sqrt{\frac{2E_s}{C}}$$

を得る。

#### 4-3 . グリフィス理論

先の図で、き裂がない場合、厚さ  $t$  の板内の応力場は均一であり、単位体積あたり、

$$u_e = \frac{\sigma^2}{2E}$$

の弾性エネルギーが蓄積される。一方、き裂があると、先端は応力が集中しているが、き裂面の上下で応力が伝達されず。弾性エネルギーが減少している領域がある。この領域の面積を  $S$  とすると、 $S = C^2$  とできる。ここで  $\sigma_f$  は係数である。よって、き裂を形成したことによる弾性エネルギーの減少は

$$U_e = -u_e S t = -\frac{\sigma_f^2}{2E} C^2 t$$

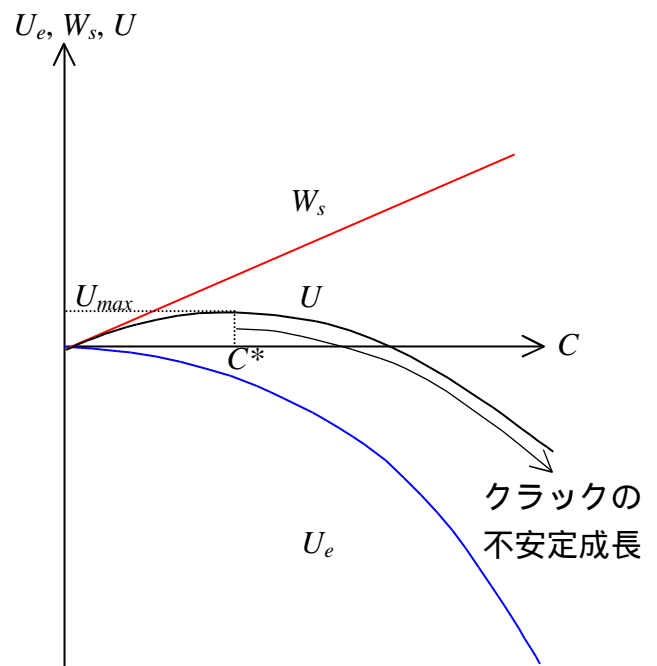
である。一方、き裂を形成するためには、クラック面積  $A$  にわたり表面を 2 つ形成しなければならない。よって、このために要する仕事は、 $A = 2Ct$  より、

$$W_s = 2A \sigma_f = 4Ct \sigma_f$$

となる。以上より、き裂がある場合の系のポテンシャルエネルギーは

$$U = U_e + W_s = -\frac{\sigma_f^2}{2E} C^2 t + 4Ct \sigma_f$$

だけ、き裂がないときよりも変化する。これらのエネルギーを図に描くと、右図のように、 $C^*$  まで  $U$  は増加して最大値  $U_{max}$  となり、それよりもき裂長さが大きくなると、 $U$  は減少している。系のポテンシャルエネルギーは低い方が安定なので、 $C > C^*$  ではクラックは自然に成長し、材料全体にいきわたる。これを





クラックの不安定成長という。

$U$  が最大となるのは、

$$\frac{U}{A} = \frac{1}{2t} \frac{U}{C} = -\frac{2}{2E} C + 2_s = 0$$

のときである。これより、破壊強度として、以下の式が与えられる。

$$f = \sqrt{\frac{4E_s}{C}}$$

グリフィスによれば、 $\nu = 0.25$  なので、上は、

$$f = \sqrt{\frac{2E_s}{C}}$$

である。

### 1) 応力拡大係数を用いた破壊条件

グリフィスの理論より、破壊の条件として応力拡大係数を用い、

$$K_I = K_{IC}, \quad K_{IC} = \sqrt{2E_s}$$

として書き直すことができる。ここで  $K_{IC}$  は破壊靱性値 (fracture toughness) と呼ばれ、材料固有の値である。応力拡大係数は一般的には

$$K_I = Y \sqrt{C}$$

と書くことができる。ここで  $Y$  はクラック幾何学因子 (crack geometry factor) と呼ばれ、クラックの形状ならびに応力の付加状態によって決まる。例えば、均一な応力をうける板の表面の短いクラックに関しては、 $Y = 1.12$  である。

### 2) 弾性エネルギー解放率を用いた破壊条件

クラックの進展に伴い、弾性エネルギーが解放されることは先に述べた。そこで、クラック単位面積あたりの弾性エネルギーの減少率、

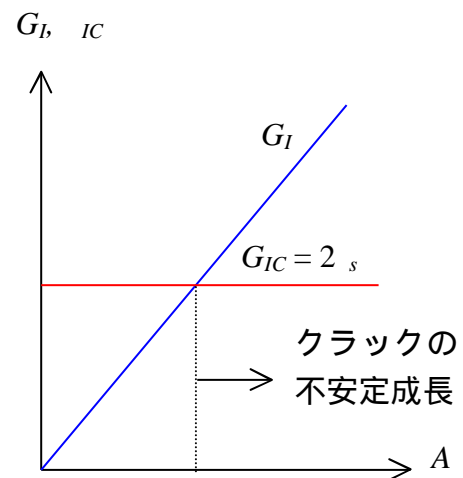
$$G = \frac{U_e}{A}$$

を定義する。これを弾性エネルギー解放率 (elastic energy release rate) という。先の例では開口型 (モード I) で、 $A = 2Ct$  より、

$$U_e = \frac{2}{2E} C^2 t = \frac{2}{E} C^2 t = \frac{2}{4Et} A^2$$

であるので、

$$G_I = \frac{U_e}{A} = \frac{2}{2Et} A = \frac{2}{E} C$$



となる。破壊の条件は

$$G_I = G_{IC}, \quad G_{IC} = \frac{W_s}{A} = 2 \sigma_s$$

で与えられる。ここで、 $G_{IC}$ は臨界弾性エネルギー解放率(critical elastic energy release rate)あるいは、単に破壊エネルギー(fracture energy)と呼ぶ。また、 $G_{IC}$ はエネルギーで表した破壊靱性値でもある。

### 3) 応力拡大係数と弾性エネルギー解放率の関係

先の例では

$$K_I = \sqrt{C}, \quad G_I = \frac{C^2}{E}$$

であった。これより、

$$G_I = \frac{K_I^2}{E}$$

となることがわかり、これは一般的に成り立つ。同様にして、破壊靱性値と破壊エネルギーの間には、

$$K_{IC} = \sqrt{EG_{IC}}, \quad \text{あるいは、} \quad G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E}$$

が成り立つ。

## 4-4 . 破壊条件の延性材料への適用：小規模降伏

### (1) 破壊条件と破壊靱性値

先に、鉄は低温で脆性破壊することを述べた。しかし、実際にはクラック先端で若干ながら塑性変形が生じる。よって、き裂を含む材料のポテンシャルエネルギーは、

$$U = U_e + W_s + W_p$$

となる。ここで、 $W_p$ は、クラックが進展する際に塑性変形に要する仕事である。よって、このときの破壊条件は、

$$\frac{U}{A} = \frac{U_e}{A} + \frac{(W_s + W_p)}{A} = 0$$

で表される。

クラック単位面積あたりの塑性仕事を  $p$  とすると、先の例では、

$$U = -\frac{C^2 t}{E} + 4 \sigma_s C t + 2 p C t$$

となる。よって、破壊の条件は

$$\frac{U}{A} = \frac{U}{2t C} = -\frac{C}{E} + 2 \sigma_s + p = 0$$

より、

$$\sqrt{C} = \sqrt{E(2s + p)}$$

となる。これより、破壊靱性値と破壊エネルギーはそれぞれ、

$$K_{IC} = \sqrt{E(2s + p)}, \quad G_{IC} = 2s + p$$

となる。

室温でタングステンは殆ど伸びずに脆性破壊し、材工の研究で調べた破壊靱性値は  $K_{IC} = 16 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$  である。一方、タングステンの表面エネルギーは  $s = 2.8 \text{ J/m}^2$  であり、ヤング率は  $E = 411 \text{ GPa}$  である。これより破壊エネルギーは

$$G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E} = \frac{(16 \times 10^6)^2}{411 \times 10^9} = 623 \text{ J/m}^2$$

となる。よって、塑性仕事は

$$p = G_{IC} - 2s = 617 \text{ J/m}^2$$

である。このように脆性的な破壊をする金属においては、塑性変形に要したエネルギーが表面エネルギーよりもはるかに大きく、

$$K_{IC} \approx \sqrt{E p}, \quad G_{IC} \approx p$$

としてよい。

## (2) 塑性域

長さ  $2C$  のクラック先端に大きさ  $r_y$  の塑性域が形成される場合を考える。塑性域における応力は、材料の降伏強さ  $\sigma_y$  となる。よって、塑性域の大きさは

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2r_y}} \text{ より、 } r_y = \frac{1}{2} \frac{K_I^2}{\sigma_y^2}$$

で与えられる。応力拡大係数は

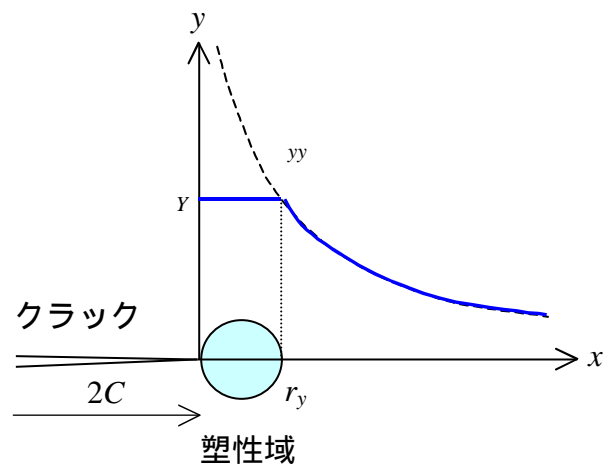
$$K_I = \sqrt{C}$$

なので、

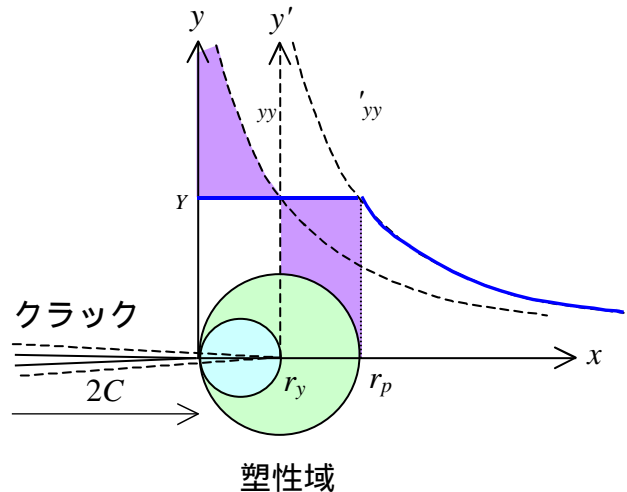
$$\frac{r_y}{C} = \frac{1}{2} \frac{C}{\sigma_y^2}$$

とできる。以上の議論は、塑性変形が生じた範囲での応力集中にも弾性解を当てはめていたため、塑性域の大きさに関して第1次の近似を与える。

より良い近似は、塑性域で支える荷重



が、弾性解の応力集中で与えられる荷重とつりあうように、クラック先端での弾塑性の応力分布を再構成することである。それには、右図に示すように、 $r_p$  まで塑性域を広げ、 $x = 0 \sim r_y$  までの超過な弾性応力場による荷重と、 $x = r_y \sim r_p$  までの降伏強さで代表される一定の応力場による荷重と等価にし、弾性解の応力場を移動して  $y'$  とすればよい。これらの要請より、



$$\int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2x}} dx = \int_{r_y}^{r_p} Y dx$$

となる。よって、

$$r_p = \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2x}} dx = \frac{2K_I}{\sqrt{2}} \sqrt{r_y} = \frac{K_I^2}{Y} \text{ より、 } r_p = \frac{1}{Y} \frac{K_I^2}{Y} = 2r_y$$

を得る。このようにしてクラック先端での弾塑性の応力場を再分布した時の塑性域の大きさ  $r_p$  は、弾性解をあてはめて求めた塑性域の大きさ  $r_y$  の 2 倍の大きさになる。

また、弾性解の  $y$  を  $r_y$  だけクラック先端から遠方にずらした。よって、有効クラック長 ( effective crack length ) は

$$2C_{eff} = 2(C + r_y) = 2C \left( 1 + \frac{r_y}{C} \right) = 2C \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{K_I^2}{Y C} \right)$$

となる。これによって決まる有効応力拡大係数 ( effective stress intensity factor ) は、

$$K_{eff} = \sqrt{C_{eff}} = \sqrt{C} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{K_I^2}{Y C}} = K_I \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{K_I^2}{Y C}}$$

で与えられる。