科目	応用数学 II	種別	小テスト	実施日	H16.12.24
学年	年	学籍番号		氏名	

以下の波動方程式の解を求めなさい。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L,\ t > 0)$$

境界条件：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$、$u(L, t) = 0$　（$t > 0$）

初期条件：$u(x, 0) = 0$、$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{3}{2}\cos\dfrac{3\pi x}{2L}$、$(0 < x < L)$

解：$u(x, t) = X(x)T(t)$ とおくと、$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ のとき、$\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{T''}{T} = \dfrac{X''}{X} = k$ として、$X'' - kX = 0$、$T'' - \alpha^2 kT = 0$を得る。

（１）$k = 0$ のとき、$X'' = 0,\ X(x) = ax + b$、また、$T'' = 0,\ T(t) = ct + d$ となる。ここで、a、b、c、d は定数である。境界条件より、$X'(x) = a = 0$、$X(L) = b = 0$だから、$u(x, t) = 0$ となって、不適である。

（２）$k \neq 0$ のとき、$X'' - kX = 0$ の一般解は、$X(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x}$ であり、$T'' - \alpha^2 kT = 0$ の一般解は $T(t) = ce^{\alpha\sqrt{k}t} + de^{-\alpha\sqrt{k}t}$。

境界条件より、$\left.\dfrac{\partial X}{\partial x}\right|_{x=0} = \sqrt{k}(a - b) = 0$、$\therefore a = b$、また、$X(L) = a(e^{\sqrt{k}L} + e^{-\sqrt{k}L}) = 0$ であるが、$k > 0$のときには、$e^{\sqrt{k}L} + e^{-\sqrt{k}L} \neq 0$より、$a = b = 0$となって、$u(x, t) = 0$であるから不適である。

従って、$a = b \neq 0$であるためには、$k < 0$であり、$k = -\mu^2 = i^2\mu^2$とおくと（ここで i は虚数単位)、

$e^{\sqrt{k}L} + e^{-\sqrt{k}L} = e^{i\mu L} + e^{-i\mu L} = 2\cos\mu L = 0$ において、$\mu = \mu_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$となればよい。

以上より、$X_n(x) = 2a_n\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$、

$$T_n(t) = c_n e^{\frac{i\alpha(2n+1)\pi t}{2L}} + d_n e^{-\frac{i\alpha(2n+1)\pi t}{2L}} = (c_n + d_n)\cos\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L} + (c_n - id_n)\sin\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L}$$

となる。ここで、$A_n = 2a_n(c_n + d_n)$、$B_n = 2a_n(c_n - id_n)$ と書き直すと、

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\left\{A_n\cos\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L} + B_n\sin\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L}\right\}$$

であり、境界値を満たす解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\left\{A_n\cos\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L} + B_n\sin\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L}\right\}$$

となる。さらに、初期条件より、

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L} = 0、\therefore A_n = 0$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\alpha(2n+1)\pi}{2L} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L} = \frac{3}{2}\cos\frac{3\pi x}{2L}$ より、 $B_1 = \frac{L}{\alpha\pi}$ であり、 $n \neq 1$ のとき $B_n = 0$ となる。

以上より、求める解は以下となる。

$$u(x,t) = \frac{L}{\alpha\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\sin\frac{\alpha(2n+1)\pi t}{2L}$$