平成１６年度　応用数学 II　偏微分方程式　期末試験問題 No.1

１．以下の１次元波動方程式の境界値、初期値問題を解きなさい。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}、（0<x<\pi、t>0）$$

境界条件：$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$、$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0$、（$t>0$）

初期条件：$u(x,0)=x$、$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=3\sin 3x$、$(0<x<\pi)$

解答例：$u(x,t)=0$は自明な解である。

よって、$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ とおくと、$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=k$として、$k\neq 0$のとき、

$$T''-kT=0、\therefore T(t)=ae^{\sqrt{k}t}+be^{-\sqrt{k}t}$$

$$X''-kX=0、\therefore X(x)=ce^{\sqrt{k}x}+de^{-\sqrt{k}x}$$

を得る。ここで、 a、b、c、d は定数である。境界条件より、$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=\sqrt{k}(c-d)=0$、また、

$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=\pi}=c\sqrt{k}(e^{\sqrt{k}\pi}-e^{-\sqrt{k}\pi})=0$であるから、$c=d\neq 0$であるためには、$e^{\sqrt{k}\pi}-e^{-\sqrt{k}\pi}=0$でなければならない。$k=-\lambda^2$とおくと、$e^{\sqrt{k}\pi}-e^{-\sqrt{k}\pi}=e^{i\lambda\pi}-e^{-i\lambda\pi}=2i\sin\lambda\pi=0$より、$\lambda_n=n$、$n=1,2,\cdots$となる。従って、$X_n(x)=2c_n i\sin nx$、$T_n(t)=a_ne^{int}+b_ne^{-int}=(a_n+b_n)\cos nt+i(a_n-b_n)\sin nt$より、

$$u_n(x,t)=\{2ic_n(a_n+b_n)\cos nt-2c_n(a_n-b_n)\sin nt\}\sin nx=(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin nx$$

となり、境界条件を満たす階は以下で与えられる。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin nx$$

ここで、初期条件より、$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx=x$であるから、

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx=-\frac{2\cos n\pi}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

を得る。また、$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin nx=3\sin 3x$より、$n=3$のとき、$3B_n\sin 3x=\sin 3x$、$\therefore B_n=\frac{1}{3}$となる。

以上より、境界条件、初期条件を満たす解は、以下で与えられる。

$$u(x,t)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nt}{n}+\frac{\sin 3t}{3}\right\}\sin nx$$

平成１６年度　応用数学 II　偏微分方程式　期末試験問題 No.2

２．以下の２次元の偏微分方程式について、境界条件、初期条件を満たす解を求めなさい。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)、\quad （0 < x < a、0 < y < b、t > 0）$$

境界条件：$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$　（$0 < y < b$、$t > 0$）、

$$\left.\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0、u(x, b, t) = 0 \quad （0 < x < a、t > 0）$$

初期条件：$u(x, y, 0) = \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{3\pi y}{2b}$　（$0 < x < a$、$0 < y < b$）

解答例：$u(x, y, t) = 0$ は自明な解である。

よって、$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \neq 0$ とおくと、与えられた偏微分方程式から、$\frac{1}{D}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k$ とおける。これより、$T(t) = ae^{Dkt}$ を得る。また、$\frac{X''}{X} = k - \frac{Y''}{Y} = k_1$ とおくと、$X(x) = be^{\sqrt{k_1}x} + ce^{-\sqrt{k_1}x}$ であり、境界条件より、$X(0) = b + c = 0$、$X(a) = b(e^{\sqrt{k_1}a} - ce^{-\sqrt{k_1}a}) = 0$ となる。$k_1 > 0$ のとき、$b = -c \neq 0$ となってふさわしくない。$k_1 = -\alpha^2$ とおくと、$e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a} = 2i\sin\alpha a = 0$ より、$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$、$m = 0, 1, 2, \cdots$ を得る。よって、

$$X_m(x) = 2b_m i\sin\frac{m\pi x}{a}$$

となる。一方、$k_2 = k - k_1$ とおくと、$\frac{Y''}{Y} = k_2$ より、$Y(y) = fe^{\sqrt{k_2}y} + ge^{-\sqrt{k_2}y}$ を得る。境界条件より、$Y'(0) = \sqrt{k_2}(f - g) = 0$、$Y(b) = f(e^{\sqrt{k_2}b} + e^{-\sqrt{k_2}b}) = 0$ であるから、$f = g \neq 0$ であるためには、$k_2 = -\beta^2$ として、$e^{i\beta b} + e^{-i\beta b} = 2\cos\beta b = 0$ となる。よって、$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$、$n = 1, 2, \cdots$ となり、

$$Y_n(y) = 2f_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

また、$k = k_1 + k_2 = -\alpha_m{}^2 - \beta_n{}^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2b}\right\}^2$ より、

$$T_{mn}(t) = a_{mn}\exp\left[-D\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2b}\right\}^2\right\}t\right]$$

となり、$A_{mn} = 4ia_{mn}b_m f_n$ とおくと、境界条件を満たす解は

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\exp\left[-D\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2b}\right\}^2\right\}t\right]$$

で与えられる。さらに初期条件より、

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a} = \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{3\pi x}{2a}$$

より、$m = 1$、$n = 2$ のとき $A_{mn} = 1$ であり、その他のときには $A_{mn} = 0$ となる。以上より、境界条件、初期条件を満たす解は、以下で与えられる。

$$u(x, y, t) = \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{3\pi x}{2a}\exp\left[-D\left\{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2\right\}t\right]$$