応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（12 月 1 日）

○次週の月曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

○解答は A4 レポート用紙を使用すること

○解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

○他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

１．次の不定積分を求めよ．

(i) $\int \sin^2 x dx$　　(ii) $\int \cos^2 x dx$　　(iii) $\int x\sin x dx$　　(iv) $\int x\cos x dx$

（解）

(i) $\sin^2 x = (1/2)(1-\cos 2x)$ より， $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(ii) $\cos^2 x = (1/2)(1+\cos 2x)$ より， $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(iii) $\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$

(iv) $\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int (x)'\sin x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

２．次の定積分を示せ．ただし， m と n は正の整数とする．

(i) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$　　(ii) $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi/2 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

（解）

(i) $n = m$ ならば， $\sin mx \cos mx = (1/2)\sin 2mx$ より，

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2mx dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2m}\cos 2mx\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4m}(1-1) = 0$$

$n \neq m$ ならば， $\sin mx \cos nx = (1/2)\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}$ より，

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x - \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{m+n}(1-1) - \frac{1}{m-n}(1-1)\right\} = 0$$

(ii) $n = m$ ならば， $\sin^2 mx = (1/2)(1-\cos 2mx)$ より，

$$\int_0^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2mx)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left\{(\pi-0) - \frac{1}{2}(0-0)\right\} = \frac{\pi}{2}$$

$n \neq m$ ならば， $\sin mx \sin nx = (1/2)\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$ より，

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi} = 0$$

３．次の 2 階線形常微分方程式の境界値問題の解を求めよ．ただし，k は実定数である．

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (0 \le x \le l)$$

$$X(0) = 0\,,\quad X(l) = 0$$

（解）

与えられた微分方程式の一般解は A, B を任意定数として次の形で与えられる．

$k = 0$ のとき，$X(x) = Ax + B$　　(1)

$k \ne 0$ のとき，$X(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$　　(2)

$k = 0$ のとき，式(1)に境界条件を適用して，

$$X(0) = B = 0\,,\quad X(l) = Al = 0$$

となる．したがって $A = B = 0$ となり，$X(x) = 0$ となり自明な解となる．

$k \ne 0$ のとき，式(2)に境界条件を適用して，

$$X(0) = A + B = 0\,,\quad X(l) = Ae^{\sqrt{k}l} + Be^{-\sqrt{k}l} = 0$$

よって，

$$A = -B \qquad (3)$$

$$A(e^{\sqrt{k}l} - e^{-\sqrt{k}l}) = 0 \qquad (4)$$

さらに，k が $k > 0$ の場合と $k < 0$ の場合を考える．

$k > 0$ のとき，$e^{\sqrt{k}l} - e^{-\sqrt{k}l} \ne 0$ より，$A = B = 0$ となり，この場合は $X(x) = 0$ となり自明な解となる．

$k < 0$ のとき，$k = -\lambda^2 = (i\lambda)^2$（ただし，$\lambda > 0$）とすると，$e^{\sqrt{k}l} - e^{-\sqrt{k}l} = e^{i\lambda l} - e^{-i\lambda l} = 2i\sin\lambda l$ となり，

式(4)は，

$$A(2i)\sin\lambda l = 0$$

よって

$$\sin\lambda l = 0$$

したがって，$\lambda > 0$ としたから，

$$\lambda l = n\pi、\qquad ただし、\ n = 1,2,\cdots$$

$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ とおくと

$$X_n(x) = A_n(e^{i\lambda_n x} - e^{-i\lambda_n x}) = 2iA_n \sin\lambda_n x = a_n \sin\lambda_n x \qquad （ここで、a_n = 2iA_n）$$

線形方程式の解の重ね合わせの性質から与式を満たす解は

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

（答）　$k \ge 0$ のとき，$X(x) = 0$

$k < 0$ のとき，$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$　（ただし，a_n は未定定数）