応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（12 月 8 日）

〇次週の月曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

〇解答は A4 レポート用紙を使用すること

〇解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

〇他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

４． $u=u(x,t)$， $c>0$ であるとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<1,\quad t>0)$$

を変数分離法を用いて一般解を求めよ．また，境界条件

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad u(1,t)=0$$

のもとで解きなさい.

（解）　$u(x,t)=X(x)T(t)$ とおくと，

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}(X(x)T(t))=\frac{d^2X(x)}{dx^2}T(t)=X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t^2}(X(x)T(t))=X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}=X(x)T''(t)$$

よって，与式は

$$X''(x)T(t)=c^2X(x)T''(t)$$

$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ とおいて

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=\mu$$，ただし μ は未定定数

よって，

$$T''-c^2\mu T=0,\quad X''-\mu X=0$$

$\mu=0$ のとき，

$$T(t)=At+B,\qquad X(x)=Cx+D$$

境界条件より

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=X'(0)T(t)=0,\quad T(t)\neq 0,\quad \therefore X'(0)=C=0$$

$$u(1,t)=0,\quad \therefore X(1)=D=0$$

この場合，$u(x,t)=X(x)T(t)=0$ となって不適である.

次に， $\mu\neq 0$ のとき，

$$T''-c^2\mu T=0 \text{ より，}\quad T(t)=Ae^{c\sqrt{\mu}t}+Be^{-c\sqrt{\mu}t}$$

$X'' - \mu X = 0$ より， $X(x) = Ce^{\sqrt{\mu}x} + De^{-\sqrt{\mu}x}$

境界条件より

$$X'(0) = \sqrt{\mu}(C - D) = 0 \qquad \therefore C = D$$

$$X(l) = Ce^{\sqrt{\mu}l} + De^{-\sqrt{\mu}l} = 0 \qquad \therefore C(e^{\sqrt{\mu}l} + e^{-\sqrt{\mu}l}) = 0$$

$X(x) \neq 0$ であるためには $C = D \neq 0$ であるから

$$e^{\sqrt{\mu}l} + e^{-\sqrt{\mu}l} = 0$$

$\mu > 0$ のときには $e^{\sqrt{\mu}l} > 0$， $e^{-\sqrt{\mu}l} > 0$ であるので，上式は成り立たない。

よって， $\mu < 0$ であり， $\lambda > 0$ である定数を用いて， $\mu = -\lambda^2 = (i\lambda)^2$ とおくと，

$$e^{\sqrt{\mu}l} + e^{-\sqrt{\mu}l} = e^{i\lambda l} + e^{-i\lambda l} = 2\cos\lambda l = 0$$

上式が成り立つためには,

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}、\ n = 1, 2, \cdots$$

であり,

$$X_n(x) = C_n(e^{i\lambda_n x} + e^{-i\lambda_n x}) = 2C_n\cos\lambda_n x$$

$$X_n(x) = C'_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}、\ n = 1, 2, \cdots$$

ここで、 $C'_n = 2C_n$。同様にして,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n e^{ic\lambda_n t} + B_n e^{ic\lambda_n t} \\ &= A'_n \cos(c\lambda_n t) + B'_n \sin(c\lambda_n t) \\ &= A'_n \cos\frac{c(2n-1)\pi t}{2l} + B'_n \sin\frac{c(2n-1)\pi t}{2l} \end{aligned}$$

ここで、指数関数から三角関数に変換したときに定数も *A'*、*B'* に変えた。よって,

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\left(a_n\cos\frac{c(2n-1)\pi t}{2l} + b_n\sin\frac{c(2n-1)\pi t}{2l}\right) \end{aligned}$$

ただし， $a_n = C'_n A'_n$， $b_n = C'_n B'_n$ とおいた。解の重ね合わせの法則より，求める解は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\left(a_n\cos\frac{c(2n-1)\pi t}{2l} + b_n\sin\frac{c(2n-1)\pi t}{2l}\right)$$

５．偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<1,\quad t>0)$$

を境界条件

$$u(0,t)=0\,,\quad u(1,t)=0$$

初期条件

$$u(x,0)=0\,,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{3\pi}{1}\sin\frac{3\pi x}{1}$$

のもとで解きなさい．また， $u(x,1)$ の概形を書け．

（解）

変数分離法により，次のように仮定する。

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{1}$$

これより

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}(X(x)T(t))=\frac{d^2X(x)}{dx^2}T(t)=X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t^2}(X(x)T(t))=X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}=X(x)T''(t) \tag{2}$$

これを与式に代入すると，

$$X''(x)T(t)=X(x)T''(t)$$

上式を $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ で割り，

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=\mu\text{，ただし}\,\mu\,\text{は未定定数}$$

とおく。これより，次の２つの常微分方程式が導かれる。

$$X''-\mu X=0 \tag{3}$$

$$T''-\mu T=0 \tag{4}$$

また，境界条件 $u(0,t)=u(1,t)=0$ より，

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0\,,\quad u(1,t)=X(1)T(t)=0$$

において， $T(t)\neq 0$ であるから，

$$X(0)=X(1)=0$$

が境界条件となる。

式(3)、(4)の解は μ の値によって次のように分けられる。

(I) $\mu=0$ のとき

$$X(x)=ax+b,\ T(t)=ct+d \qquad (a\,,b\,,c\,,d\ \text{:定数})$$

となる。このとき，境界条件より

$$X(0)=b=0\text{、}\ X(1)=a1=0\text{、}\ \therefore X(x)=0$$

となって不適である。

(II)　$\mu \neq 0$ のとき

$$X(x) = ae^{\sqrt{\mu}x} + be^{-\sqrt{\mu}x}$$

$$T(t) = ce^{\sqrt{\mu}t} + de^{-\sqrt{\mu}t} \qquad (6)$$

となる。ここで境界条件 $X(0) = X(\mathrm{l}) = 0$ を適用すると、

$$X(0) = a + b = 0 \qquad \therefore a = -b$$

$$X(\mathrm{l}) = ae^{\sqrt{\mu}\mathrm{l}} + be^{-\sqrt{\mu}\mathrm{l}} = 0 \qquad \therefore a(e^{\sqrt{\mu}\mathrm{l}} - e^{-\sqrt{\mu}\mathrm{l}}) = 0$$

$X(x) \neq 0$ であるためには、$a = -b \neq 0$ でなければならないから,

$$e^{\sqrt{\mu}\mathrm{l}} - e^{-\sqrt{\mu}\mathrm{l}} = 0$$

$\mu > 0$ のときには、$e^{\sqrt{\mu}\mathrm{l}} > e^{-\sqrt{\mu}\mathrm{l}}$ なので上式は成り立たない。

よって、$\mu < 0$ のとき、$\lambda > 0$ として，$\mu = -\lambda^2 = (i\lambda)^2$ とおくと,

$$e^{\sqrt{\mu}\mathrm{l}} - e^{-\sqrt{\mu}\mathrm{l}} = e^{i\lambda\mathrm{l}} - e^{-i\lambda\mathrm{l}} = 2i\sin\lambda\mathrm{l} = 0$$

したがって

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\mathrm{l}} \qquad (n = 1,2,3,....) \qquad (12)$$

となる。これから,

$$X_n(x) = a_n(e^{i\lambda_n x} - e^{-i\lambda_n x}) = 2ia_n \sin\lambda_n x = 2ia_n \sin\frac{n\pi x}{\mathrm{l}}$$

$$\begin{aligned}T_n(t) &= c_n e^{i\lambda_n t} + d_n e^{-i\lambda_n t}\\ &= (c_n + d_n)\cos\lambda_n t + i(c_n - d_n)\sin\lambda_n t\\ &= (c_n + d_n)\cos\frac{n\pi t}{\mathrm{l}} + i(c_n - d_n)\sin\frac{n\pi t}{\mathrm{l}}\end{aligned}$$

と表し、定数を $A_n = 2ia_n(c_n + d_n)$、$B_n = -2a_n(c_n - d_n)$ とまとめて、以下の解を得る。

$$\begin{aligned}u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t)\\ &= \sin\frac{n\pi x}{\mathrm{l}}\left(A_n\cos\frac{n\pi t}{\mathrm{l}} + B_n\sin\frac{n\pi t}{\mathrm{l}}\right)\end{aligned}$$

解の重ね合わせの法則より、境界条件を満たす解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}(A_n\cos\frac{n\pi t}{l}+B_n\sin\frac{n\pi t}{l})$$

となる。また、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}(-A_n\sin\frac{n\pi t}{l}+B_n\cos\frac{n\pi t}{l})$$

である。ここで，初期条件より，

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

であるから，すべての n に対して， $A_n=0$ となる。また，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{3\pi}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}$$

より， $n=3$ 以外の係数 B_n は全て 0 であり、 $B_3=1$ である。求める解は次のように与えられる。

$$u(x,t)=\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{3\pi t}{l}$$

$u(x,l)=\sin\frac{3\pi x}{l}\sin 3\pi=0$ より、グラフは…。（省略）