応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（12 月 15 日）

○次週の月曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

○解答は A4 レポート用紙を使用すること

○解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

○他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

６．次の 2 階線形常微分方程式の境界値問題の解を求めよ．ただし，k は実定数である．

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (0 \le x \le \ell)$$

$$X'(0) = 0\,,\quad X'(\ell) = 0$$

（解）

与えられた微分方程式の一般解は $A\,, B$ を任意定数として次の形で与えられる．

$k = 0$ のとき，$X(x) = Ax + B$ (1)

$k \ne 0$ のとき，$X(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$ (2)

式(1)，(2)を微分すると，

$k = 0$ のとき，$X'(x) = A$ (3)

$k \ne 0$ のとき，$X'(x) = \sqrt{k}(Ae^{\sqrt{k}x} - Be^{-\sqrt{k}x})$ (4)

$k = 0$ のとき，式(3)に境界条件を適用して，

$$X'(0) = A = 0\,,\quad X'(\ell) = A = 0$$

となる．したがって，$k = 0$ のときの解は $X(x) = B$（ただし，B は未定定数）となる．

$k \ne 0$ のとき，式(4)に境界条件を適用して，

$$X'(0) = \sqrt{k}(A - B) = 0\,,\quad X'(\ell) = \sqrt{k}(Ae^{\sqrt{k}\ell} - Be^{-\sqrt{k}\ell}) = 0$$

よって，

$A = B$ (5)

$A(e^{\sqrt{k}\ell} - e^{-\sqrt{k}\ell}) = 0$ (6)

さらに，k が $k > 0$ の場合と $k < 0$ の場合を考える．

$k > 0$ のとき，$e^{\sqrt{k}\ell} - e^{-\sqrt{k}\ell} \ne 0$ より，$A = B = 0$ となり，この場合は $X(x) = 0$ となり自明な解となる．

$k < 0$ のとき，$k = -\lambda^2 = (i\lambda)^2$（ただし，$\lambda > 0$）とすると，$e^{\sqrt{k}\ell} - e^{-\sqrt{k}\ell} = e^{i\lambda\ell} - e^{-i\lambda\ell} = 2i\sin\lambda\ell$ となり，

式(6)は，

$$A(2i)\sin\lambda\ell = 0$$

よって

$$\sin\lambda\ell = 0$$

したがって，$\lambda > 0$ としたから，

$\lambda\ell = n\pi$、　ただし、$n = 1, 2, \cdots$

$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\ell}$ とおくと

$$X_n(x) = A_n(e^{i\lambda_n x} + e^{-i\lambda_n x}) = 2iA_n \cos\lambda_n x = a_n \cos\lambda_n x \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{7}$$

ここで，$a_n = 2iA_n$．式(7)において $n = 0$ すなわち $\lambda_n = 0$（この場合 $k = 0$）とすると，$X_0(x) = a_0$（a_0 は未定定数）となるが，これは，上で求めた $k = 0$ のときの解 $X(x) = B$（B は未定定数）と同じ．したがって，$k = 0$ のときの解 $X(x) = B$ を式(7)に含めると，

$$X_n(x) = a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

線形方程式の解の重ね合わせの性質から $k \le 0$ のときの解は

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

（答）

$k > 0$ のとき，$X(x) = 0$

$k \le 0$ のとき，$X(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$　（ただし，a_n は未定定数）

7．偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le \ell,\quad t \ge 0)$$

(1) 変数分離法を用いて，与式を２つの常微分方程式に変換せよ.

(2) ２つの常微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 次の境界条件を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ.

$u(0,t) = 0$，$u(\ell,t) = 0$

(4) (3)の境界条件を満たし，かつ，次の各場合の初期条件を満たす解 $u(x,t)$ をそれぞれ求めよ.

(i) $u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{\ell}$

(ii) $u(x,0) = \dfrac{4}{\ell} x \left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right)$

（解）

(1) 変数分離法により $u(x,t) = X(x)T(t)$ とおくと，

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}(X(x)T(t)) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}T(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = X(x)\frac{dT(t)}{dt} = X(x)T'(t)$$

よって，与式は

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

$u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0$ とおいて上式を除すと，

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

x と t は独立変数であるので，この関係が常に成立するためには，

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu\ ,\ \text{ただし}\ \mu\ \text{は未定定数}$$

とならなければならない．したがって，与式は次のような２つの常微分方程式となる．

$$T'(t) - \mu T(t) = 0\ ,\quad X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad \text{（ただし}\ \mu\ \text{は未定定数）}$$

(2)　$\mu = 0$ のとき，

$X''(x) = 0$ より，$X(x) = Ax + B$

$T'(t) = 0$ より，$T(t) = C$

$\mu \neq 0$ のとき，

$X'' - \mu X = 0$ より，$X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$

$T' - \mu T = 0$ より，$T(t) = Ce^{\mu t}$

（答）$\mu = 0$ のとき，$X(x) = Ax + B$，$T(t) = C$

$\mu \neq 0$ のとき，$X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$，$T(t) = Ce^{\mu t}$

ただし，A，B，C，μ は未定定数

(3)

$\mu = 0$ のとき，$u(x,t) = X(x)T(t) = (Ax + B)C = ax + b$ （ただし，$AC = a$，$BC = b$）

$\mu \neq 0$ のとき，$u(x,t) = X(x)T(t) = (Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x})Ce^{\mu t} = (ae^{\sqrt{\mu}x} + be^{-\sqrt{\mu}x})e^{\mu t}$ （ただし，$AC = a$，$BC = b$）

$\mu = 0$ のとき，境界条件より

$u(0,t) = b = 0$，$u(\ell,t) = a\ell + b = 0$

この場合，$a = b = 0$ となり $u(x,t) = X(x)T(t) = 0$ となって不適である．

$\mu \neq 0$ のとき，境界条件より

$u(0,t) = (a + b)e^{\mu t} = 0$，$u(\ell,t) = (ae^{\sqrt{\mu}\ell} + be^{-\sqrt{\mu}\ell})e^{\mu t} = 0$

$e^{\mu t} \neq 0$ より

$a + b = 0$

$$ae^{\sqrt{\mu}\ell}+be^{-\sqrt{\mu}\ell}=0$$

よって，

$$b=-a$$

$$a(e^{\sqrt{\mu}\ell}-e^{-\sqrt{\mu}\ell})=0$$

$u(x,t)\neq 0$ であるためには $a=-b\neq 0$ であるから

$$e^{\sqrt{\mu}\ell}-e^{-\sqrt{\mu}\ell}=0$$

$\mu>0$ のときには常に $e^{\sqrt{\mu}\ell}>e^{-\sqrt{\mu}\ell}$ なので，上式は成り立たない．

よって，$\mu<0$ であり，$\lambda>0$ である定数を用いて，$\mu=-\lambda^2=(i\lambda)^2$ とおくと，

$$e^{\sqrt{\mu}\ell}-e^{-\sqrt{\mu}\ell}=e^{i\lambda\ell}-e^{-i\lambda\ell}=2i\sin\lambda\ell=0$$

上式が成り立つためには，$\lambda>0$ より

$$\lambda=\frac{n\pi}{\ell},\quad n=1,2,\cdots$$

したがって，

$$u(x,t)=a(e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x})e^{-\lambda^2 t}=a2i\sin\lambda xe^{-\lambda^2 t}=A\sin\frac{n\pi x}{\ell}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}},\quad n=1,2,\cdots$$

ここで，$a2i=A$ とおいた．$u(x,t)$ に添え字 n をつけると，

$$u_n(x,t)=A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}},\quad n=1,2,\cdots$$

解の重ね合わせの法則より，求める解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}}$$

(4)

(i) 初期条件 $u(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{\ell}$ より，

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\sin\frac{3\pi x}{\ell}$$

$n=3$ 以外の係数 A_n は全て 0 であり、$A_3=1$ である．よって，求める解は

$$u(x,t)=\sin\frac{3\pi x}{\ell}e^{-\frac{9\pi^2 t}{\ell^2}}$$

(ii) 初期条件 $u(x,0)=\frac{4}{\ell}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$ より，

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\frac{4}{\ell}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

ここで，$\sin\frac{m\pi x}{\ell}$ をかけ，$x=0$ 〜 ℓ まで積分すると，

$$\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\int_0^{\ell}\frac{4}{\ell}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\int_0^{\ell}\frac{4}{\ell}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

左辺の級数中の積分は $n=m$ の項は $\ell/2$，それ以外は全て 0 となる．右辺は

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ell}\frac{4}{\ell}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{4}{\ell}\int_0^{\ell}x\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx-\frac{4}{\ell^2}\int_0^{\ell}x^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
&=\frac{4}{\ell}\left[x\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}-\frac{4}{\ell}\int_0^{\ell}\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx-\frac{4}{\ell^2}\left[x^2\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}+\frac{4}{\ell^2}\int_0^{\ell}2x\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
&=-\frac{4\ell}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4}{n\pi}\left[\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}+\frac{4\ell}{n\pi}\cos n\pi-\frac{8}{\ell n\pi}\int_0^{\ell}x\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
&=-\frac{8}{n\pi\ell}\left[x\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}+\frac{8}{n\pi\ell}\int_0^{\ell}\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{8}{n^2\pi^2}\left[\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}=\frac{8\ell}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)\\
&=\frac{8\ell}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

よって，

$$A_n\frac{\ell}{2}=\frac{8\ell}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\qquad\therefore A_n=\frac{16}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

よって求める解は

$$u(x,t)=\frac{16}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{\ell}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}}$$