応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（12 月 22 日）

〇2006 年 1 月 10 日火曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

〇解答は A4 レポート用紙を使用すること

〇解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

〇他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

８．偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t \geq 0,\quad 0 \leq x \leq L)$$

を境界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{0,t}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{L,t}=0$$

初期条件

$$u(x,0)=3+\cos(\pi x/L)+4\cos(2\pi x/L)$$

のもとで解きなさい.

（解）

変数分離解 $u(x,t)=X(x)T(t)$ を仮定し，与えられた偏微分方程式に代入して整理すると，

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)} \tag{1}$$

式(1)の値は定数でなければならないので，その実定数を μ とおけば，2 つの常微分方程式が導かれる.

$$X''(x)-\mu X(x)=0,\quad T'(t)-\mu T(t)=0$$

$\mu=0$ のとき， $X(x)=Ax+B$ ， $T(t)=C$ より，

$$u(x,t)=(Ax+B)C=ax+b \quad （ただし，\ AC=a,\ \ BC=b）$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=a$$

境界条件より $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0=a \quad \therefore a=0$ ，よって，

$$u(x,t)=b \qquad （ただし，\ b\ 未定定数） \tag{2}$$

は可能な解である.

$\mu \neq 0$ のとき， $X(x)=Ae^{\sqrt{\mu}x}+Be^{-\sqrt{\mu}x}$ ， $T(t)=Ce^{\mu t}$ より，

$$u(x,t)=X(x)T(t)=(Ae^{\sqrt{\mu}x}+Be^{-\sqrt{\mu}x})Ce^{\mu t}=(ae^{\sqrt{\mu}x}+be^{-\sqrt{\mu}x})e^{\mu t} \quad （ただし，\ AC=a,\ \ BC=b）$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\sqrt{\mu}(ae^{\sqrt{\mu}x}-be^{-\sqrt{\mu}x})e^{\mu t}$$

$\mu>0$ のとき，境界条件より，

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\sqrt{\mu}(a-b)e^{\mu t}=0,\quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=\sqrt{\mu}(ae^{\sqrt{\mu}L}-be^{-\sqrt{\mu}L})e^{\mu t}=0$$

よって，

$$a=b,\quad ae^{\sqrt{\mu}L}-be^{-\sqrt{\mu}L}=a(e^{\sqrt{\mu}L}-e^{-\sqrt{\mu}L})=0$$

$u(x,t)\neq 0$ であるためには $a=b\neq 0$ でなければならないので，

$$e^{\sqrt{\mu}L}-e^{-\sqrt{\mu}L}=0$$

$\mu>0$ のときには常に $e^{\sqrt{\mu}L}>e^{-\sqrt{\mu}L}$ なので，上式は成り立たない．

よって，$\mu<0$ であり，$\lambda>0$ である定数を用いて，$\mu=-\lambda^2=(i\lambda)^2$ とおくと，

$$e^{\sqrt{\mu}L}-e^{-\sqrt{\mu}L}=e^{i\lambda L}-e^{-i\lambda L}=2i\sin\lambda L=0$$

上式が成り立つためには，$\lambda>0$ より

$$\lambda=\frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\cdots$$

したがって，

$$u(x,t)=a(e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x})e^{-\lambda^2 t}=a2\cos\lambda x e^{-\lambda^2 t}=A\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}, \quad n=1,2,\cdots$$

ここで，$a2=A$ とおいた．$u(x,t)$ に添え字 $n$ をつけると，

$$u_n(x,t)=A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}, \quad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

式(3)において $n=0$ すなわち $\lambda_n=0$（この場合 $\mu=0$）とすると，$u_0(x)=A_0$（$A_0$ は未定定数）となるが，これは，上で求めた $\mu=0$ のときの解 $u(x,t)=b$（$b$ は未定定数）と同じ．したがって，$\mu=0$ のときの解 $u(x,t)=b$ を式(3)に含めると，

$$u_n(x,t)=A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

したがって，線形方程式の解の重ね合わせの性質から，

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\pi x/L)\exp(-n^2\pi^2 t/L^2)$$

初期条件から

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\pi x/L)=3+\cos(\pi x/L)+4\cos(2\pi x/L) \tag{4}$$

上式の両辺に $\cos(m\pi x/L)$ (ただし，$m=0,1,2,\cdots$)を掛けて，$x=0$ ～ $L$ まで積分すると，

$$\int_0^L\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx=\int_0^L\big(3+\cos(\pi x/L)+4\cos(2\pi x/L)\big)\cos(m\pi x/L)dx$$

$$A_0\int_0^L\cos(m\pi x/L)dx+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^L\cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx=3\int_0^L\cos(m\pi x/L)dx$$
$$+\int_0^L\cos(\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx+4\int_0^L\cos(2\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx$$

$$(A_0-3)\int_0^L\cos(m\pi x/L)dx+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^L\cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx=\int_0^L\cos(\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx$$
$$+4\int_0^L\cos(2\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx$$

$m=0$ のとき，

左辺第 1 項 $=(A_0-3)\int_0^L dx=(A_0-3)L$，

左辺第 2 項 $=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^L\cos(n\pi x/L)dx=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\frac{L}{n\pi x}\sin(n\pi x/L)\right]_0^L=0$

右辺 $=\int_0^L\cos(\pi x/L)dx+4\int_0^L\cos(2\pi x/L)dx=0$

よって，$(A_0-3)L=0 \quad \therefore A_0=3$

$m>0$ のとき,

$$\text{左辺第 1 項} = (A_0 - 3)\int_0^L \cos(m\pi x/L)dx = 0$$

$$\text{左辺第 2 項} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx = \begin{cases} A_n L/2 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\text{右辺第 1 項} = \int_0^L \cos(\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx = \begin{cases} L/2 & (m=1) \\ 0 & (m \neq 1) \end{cases}$$

$$\text{右辺第 2 項} = 4\int_0^L \cos(2\pi x/L)\cos(m\pi x/L)dx = \begin{cases} 4L/2 & (m=2) \\ 0 & (m \neq 2) \end{cases}$$

よって, $n=m$ の場合に, $A_n L/2 = \begin{cases} L/2 & (n=1) \\ 4L/2 & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases}$ $\quad \therefore A_1 = 1$, $A_2 = 4$, $A_n = 0$ $(n \geq 3)$

したがって, $A_0 = 3$, $A_1 = 1$, $A_2 = 4$, $A_n = 0$ $(n \geq 3)$

以上より解は次のようになる.

$$u(x,t) = 3 + \cos(\pi x/L)\exp(-\pi^2 t/L^2) + 4\cos(2\pi x/L)\exp(-4\pi^2 t/L^2)$$

（別解）

式(4)が成り立つには $n=0$, 1, 2 以外の項で, $A_n = 0$ でなければならない。

$$A_0 + A_1\cos(\pi x/L) + A_2\cos(2\pi x/L) = 3 + \cos(\pi x/L) + 4\cos(2\pi x/L)$$

$$\therefore A_0 = 3, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 4$$

以上より解は次のようになる.

$$u(x,t) = 3 + \cos(\pi x/L)\exp(-\pi^2 t/L^2) + 4\cos(2\pi x/L)\exp(-4\pi^2 t/L^2)$$

９．偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad （t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1）$$

を境界条件

$u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$

初期条件

$u(x,0) = 2x$ （$0 \leq x \leq 1/2$）

$u(x,0) = 2(1-x)$ （$1/2 < x \leq 1$）

のもとで解きなさい．ただし, $k>0$ である.

（解）

（解答例）

変数分離解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ を仮定し，与えられた偏微分方程式に代入して整理すると,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}$$

この等式の値は定数でなければならないので，その実定数を $\mu$ とおけば，微分方程式 $X''(x) - \mu X(x) = 0$ が自明な解以外の解を持つためには, $\mu = -\lambda^2$ でなくてはならない．よって，次の境界条件と初期条

件を満たす 2 つ常微分方程式が導かれる。

$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$、境界条件　$X(0)=X(1)=0$ (1)

$T'(t)+k\lambda^2 T(t)=0$、

初期条件　$T(0)=2x$ （$0\le x\le 1/2$），$T(0)=2(1-x)$ （$1/2\le x\le 1$） (2)

式 (1) の解は次式となる。

$$X(x)=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x$$

境界条件　$X(0)=X(1)=0$　から次式が得られる。

$$X(0)=a=0, X(1)=b\sin\lambda=0 \tag{3}$$

式 (3) から

$$a=0, \lambda=n\pi \qquad (n=1, 2, 3\ \cdots)$$

$\lambda_n=n\pi$　とおくと式 (1)　の解は次式で与えられる。

$$X_n(x)=b_n\sin\lambda_n x \tag{4}$$

式 (2) の解は $\lambda=\lambda_n$ のとき次式で与えられる。

$$T_n(t)=c_n\exp(-k\lambda^2{}_n t) \tag{5}$$

$\lambda=\lambda_n$ に対する解を式 (3),(4) から

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=a_n\sin\lambda_n x\exp(-k\lambda_n t)$$

と置くと，式(1),(2) の一般解は線形方程式の解の重ね合わせの性質から次式で与えられる。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x\exp(-kn^2\pi^2 t) \tag{6}$$

初期条件は区間 $[0,1]$ で定義された $x$ の関数（$2x$ （$0\le x\le 1/2$），$2(1-x)$ （$1/2<x\le 1$））として与えられているので，これを $f(x)$ とおく．式 (6) が初期条件を満たすためには,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x=f(x)$$

上式の両辺に $\sin m\pi x$ をかけて $x=0$ ～1 まで積分すると,

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x\sin m\pi x=\int_0^1 f(x)\sin m\pi x dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^1\sin n\pi x\sin m\pi x=\int_0^1 f(x)\sin m\pi x dx$$

上式の左辺は $n\ne m$ のとき 0,　$n=m$ のとき $a_n/2$ となる．したがって,

$$\frac{a_n}{2}=\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$$

$$\frac{a_n}{2}=\int_0^{1/2}2x\sin n\pi x dx+\int_{1/2}^{1}2(1-x)\sin n\pi x dx$$

$$=\int_0^{1/2}2x\sin n\pi x dx+\int_{1/2}^{1}2(1-x)\sin n\pi x dx=2\left[x(-1/n\pi)\cos n\pi x\right]_0^{1/2}$$

$$-2\int_0^{1/2}(-1/n\pi)\cos n\pi x dx+4\left[(1-x)(-1/n\pi)\cos n\pi x\right]_{1/2}^{1}-2\int_{1/2}^{1}(-1)(-1/n\pi)\cos n\pi x dx$$

$$= (-1/n\pi)\cos(n\pi/2) + 2\left[(1/n\pi)\sin n\pi x\right]_0^{1/2} + (1/n\pi)\cos(n\pi/2) + 2\left[(1/n\pi)\sin n\pi x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \left(2/n^2\pi^2\right)\sin(n\pi/2) + \left(2/n^2\pi^2\right)\sin(n\pi/2) = \left(4/n^2\pi^2\right)\sin(n\pi/2)$$

これを式(6)に代入して，

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)\sin(n\pi x)\exp(-kn^2\pi^2 t)$$