応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（1 月 12 日）

〇次週の月曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

〇解答は A4 レポート用紙を使用すること

〇解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

〇他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

10. 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (t \ge 0,\ 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le \pi)$$

を境界条件：$u(0,y,t)=0$，$u(L,y,t)=0$，$u(x,0,t)=0$，$u(x,\pi,t)=0$

初期条件：$u(x,y,0)=\sin(\pi x/L)\sin y$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x,y,0} = \sqrt{2}\sin(\pi x/L)\sin y$

のもとで解きなさい.

（解）

変数分離解 $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$ を仮定し，与えられた偏微分方程式に代入して整理すると，

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \tag{1}$$

式(1)の値は定数でなければならないので，その実定数を k_1 とおけば,

$$T'' - k_1 T = 0 \tag{2}$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k_1 \tag{3}$$

式(3)をさらに変形すると

$$\frac{X''}{X} = k_1 - \frac{Y''}{Y} \tag{4}$$

式(4)の値も定数でなければならないので，その実定数を k_2 とおけば,

$$X'' - k_2 X = 0 \tag{5}$$

$$Y'' - (k_1 - k_2)Y = 0 \tag{6}$$

境界条件より,

$$X(0)=0,\quad X(L)=0,\quad Y(0)=0,\quad Y(\pi)=0$$

(I) $k_1 - k_2 = 0$ のとき，式(6)は $Y(y)=Ay+B$ となり，境界条件 $Y(0)=Y(\pi)=0$ より $A=B=0$ $\quad \therefore Y(y)=0$

よって，$u(x,y,t)=0$ となり不適となる.

(II) $k_1 - k_2 \ne 0$ のとき，式(6)から

$$Y(y) = Ae^{\sqrt{k_1-k_2}\,y} + Be^{-\sqrt{k_1-k_2}\,y}$$

境界条件 $Y(0)=Y(\pi)=0$ より

$$Y(0)=A+B=0,\qquad Y(y)=A(e^{\sqrt{k_1-k_2}\pi} - e^{-\sqrt{k_1-k_2}\pi})$$

$A=-B\ne 0$ であるためには，$k_1-k_2<0$．$k_1-k_2=-\xi^2\ (\xi>0)$ とおいて

$$e^{\sqrt{k_1-k_2}\pi} - e^{-\sqrt{k_1-k_2}\pi} = e^{i\xi\pi} - e^{-i\xi\pi} = 2i\sin\xi\pi = 0 \quad \therefore \xi_m = m \quad (m = 1,2,\cdots)$$

よって,

$$Y_m(y) = 2iA_m \sin my \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

さらに, k_2 の値により次のように場合分けをする.

(i) $k_2 = 0$ のとき, 式(5)は $X(x) = Cx + D$ となり, 境界条件 $X(0) = X(L) = 0$ より $C = D = 0$

$\therefore X(x) = 0$ よって, $u(x,y,t) = 0$ となり不適となる.

(ii) $k_2 \neq 0$ のとき, $X(x) = Ce^{\sqrt{k_2}x} + De^{-\sqrt{k_2}x}$ となり, 境界条件 $X(0) = X(L) = 0$ より

$$X(0) = C + D = 0, \quad X(L) = C(e^{\sqrt{k_2}L} - e^{-\sqrt{k_2}L}) = 0$$

$C = -D \neq 0$ であるためには, $k_2 < 0$. $k_2 = -\lambda^2$ $(\lambda > 0)$とおいて

$$e^{\sqrt{k_2}L} - e^{-\sqrt{k_2}L} = e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L} = 2i\sin\lambda L = 0 \qquad \therefore \lambda_n = n\pi/L \quad (n = 1,2,\cdots)$$

よって,

$$X_n(x) = 2iC_n \sin(n\pi x/L) \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$k_1 - k_2 = -\xi^2$ より,

$$k_1 = k_2 - \xi^2 = -(\lambda^2 + \xi^2) = -\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + m^2\right) < 0$$

式(2)から

$$T(t) = Ee^{\sqrt{k_1}t} + De^{-\sqrt{k_1}t} = Ee^{i\sqrt{-k_1}t} + De^{i\sqrt{-k_1}t} = (E+D)\cos\sqrt{-k_1}t + i(E-D)\sin\sqrt{-k_2}t$$

$k_1 = -\mu^2$ $(\mu > 0)$とおいて,

$$T_{nm}(t) = (E_{nm} + D_{nm})\cos\mu_{nm}t + i(E_{nm} - D_{nm})\sin\mu_{nm}t \quad (n,m = 1,2,\cdots)$$

ただし, $\mu = \sqrt{(n^2\pi^2/L^2) + m^2}$

$$u_{nm}(x,y,t) = X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t)$$

$$= \sin(n\pi x/L)\sin my(a_{nm}\cos\mu_{nm}t + b_{nm}\sin\mu_{nm}t) \quad (n,m = 1,2,\cdots)$$

ここで, $a_{nm} = (2iC_n)(2iA_{nm})(E_{nm} + D_{nm})$, $b_{nm} = (2iC_n)(2iA_m)i(E_{nm} - D_{nm})$.

したがって, 線形方程式の解の重ね合わせの性質から,

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin my(a_{nm}\cos\mu_{nm}t + b_{nm}\sin\mu_{nm}t)$$

また,

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin my(-a_{nm}\sin\mu_{nm}t + b_{nm}\cos\mu_{nm}t)$$

初期条件から

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin my=\sin\frac{\pi x}{L}\sin y \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_{nm}b_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin my=\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{L}\sin y \tag{8}$$

式(7)の両辺に $\sin(n_1\pi x/L)\sin m_1 y$ を掛けて， $x=0\sim L$， $y=0\sim\pi$ まで積分すると，

$$\int_0^L\int_0^\pi\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin my\sin m_1 y\,dxdy=\int_0^L\int_0^\pi\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin y\sin m_1 y\,dxdy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\int_0^\pi\left(\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx\right)\sin my\sin m_1 y\,dy=\int_0^\pi\left(\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx\right)\sin y\sin m_1 y\,dy \tag{9}$$

ここで，

$$\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\begin{cases}L/2 & (n=n_1)\\ 0 & (n\neq n_1)\end{cases},\qquad \int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\begin{cases}L/2 & (n_1=1)\\ 0 & (n_1\neq 1)\end{cases}$$

であるので，式(9)は次のようになる．

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{n_1 m}\int_0^\pi\frac{L}{2}\sin my\sin m_1 y\,dy=\int_0^\pi\left(\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx\right)\sin y\sin m_1 y\,dy$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{1m}\int_0^\pi\frac{L}{2}\sin my\sin m_1 y\,dy=\int_0^\pi\frac{L}{2}\sin y\sin m_1 y\,dy \tag{10}$$

また，

$$\int_0^\pi\sin my\sin m_1 y\,dy=\begin{cases}\pi/2 & (m=m_1)\\ 0 & (m\neq m_1)\end{cases},\qquad \int_0^\pi\sin y\sin m_1 y\,dy=\begin{cases}\pi/2 & (m_1=1)\\ 0 & (m_1\neq 1)\end{cases}$$

よって，式(10)は次のようになる．

$$a_{1m_1}\frac{L}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{L}{2}\int_0^\pi\sin m_1 y\,dy$$

$$a_{1,1}\frac{L}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{L}{2}\frac{\pi}{2}$$

よって， a_{nm} は次のようになる．

$$a_{1,1}=1,\quad a_{n,m}=0(n\neq 1,m\neq 1)$$

同様にして，式(9)は

$$\mu_{1,1}b_{1,1}=\sqrt{2}$$

となり， $\mu=\sqrt{(n^2\pi^2/L^2)+m^2}$ より， $\mu_{1,1}=\sqrt{(\pi^2/L^2)+1}$ なので， b_{nm} は次のようになる．

$$b_{1,1}=\sqrt{2}\Big/\sqrt{(\pi^2/L^2)+1},\quad b_{n,m}=0(n\neq 1,m\neq 1)$$

以上より，求める解は次のようになる．

$$u(x,y,t)=\sin\frac{\pi x}{L}\sin y\left(\cos\sqrt{(\pi^2/L^2)+1}\,t+\sqrt{\frac{2}{\pi^2/L^2+1}}\sin\sqrt{(\pi^2/L^2)+1}\,t\right)$$

11. 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (0 < x < L,\ 0 < y < L, 0 < t)$$

を境界条件：$u(0,y,t) = 0$， $u(L,y,t) = 0$， $u(x,0,t) = 0$， $u(x,L,t) = 0$

初期条件：$u(x,y,0) = x(L-x)\sin(3\pi y/L)$， $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x,y,0} = 0$

のもとで解きなさい．

（解）

変数分離解 $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ を仮定し，与えられた偏微分方程式に代入して整理すると，

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \tag{1}$$

式(1)の値は定数でなければならないので，その実定数を k_1 とおけば，

$$T'' - k_1 T = 0 \tag{2}$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k_1 \tag{3}$$

式(3)をさらに変形すると

$$\frac{X''}{X} = k_1 - \frac{Y''}{Y} \tag{4}$$

式(4)の値も定数でなければならないので，その実定数を k_2 とおけば，

$$X'' - k_2 X = 0 \tag{5}$$

$$Y'' - (k_1 - k_2)Y = 0 \tag{6}$$

境界条件より，

$$X(0) = 0,\quad X(L) = 0,\quad Y(0) = 0,\quad Y(\pi) = 0$$

(I) $k_1 - k_2 = 0$ のとき，式(6)は $Y(y) = Ay + B$ となり，境界条件 $Y(0) = Y(L) = 0$ より $A = B = 0$ $\therefore Y(y) = 0$

よって， $u(x,y,t) = 0$ となり不適となる．

(II) $k_1 - k_2 \neq 0$ のとき，式(6)から

$$Y(y) = Ae^{\sqrt{k_1 - k_2}\,y} + Be^{-\sqrt{k_1 - k_2}\,y}$$

境界条件 $Y(0) = Y(L) = 0$ より

$$Y(0) = A + B = 0,\quad Y(y) = A(e^{\sqrt{k_1 - k_2}\,L} - e^{-\sqrt{k_1 - k_2}\,L})$$

$A = -B \neq 0$ であるためには， $k_1 - k_2 < 0$． $k_1 - k_2 = -\xi^2$ ($\xi > 0$)とおいて

$$e^{\sqrt{k_1 - k_2}\,L} - e^{-\sqrt{k_1 - k_2}\,L} = e^{i\xi L} - e^{-i\xi L} = 2i\sin\xi L = 0 \quad \therefore \xi_m = m\pi/L \quad (m = 1,2,\cdots)$$

よって，

$$Y_m(y) = 2iA_m \sin(m\pi y/L) \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

さらに，k_2 の値により次のように場合分けをする．

(i) $k_2 = 0$ のとき，式(5)は $X(x) = Cx + D$ となり，境界条件 $X(0) = X(L) = 0$ より $C = D = 0$

$\therefore X(x) = 0$　よって，$u(x, y, t) = 0$ となり不適となる．

(ii) $k_2 \neq 0$ のとき，$X(x) = Ce^{\sqrt{k_2}x} + De^{-\sqrt{k_2}x}$ となり，境界条件 $X(0) = X(L) = 0$ より

$$X(0) = C + D = 0\,,\quad X(L) = C(e^{\sqrt{k_2}L} - e^{-\sqrt{k_2}L}) = 0$$

$C = -D \neq 0$ であるためには，$k_2 < 0$．$k_2 = -\lambda^2$ ($\lambda > 0$)とおいて

$$e^{\sqrt{k_2}L} - e^{-\sqrt{k_2}L} = e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L} = 2i\sin\lambda L = 0 \qquad \therefore \lambda_n = n\pi / L \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

よって，

$$X_n(x) = 2iC_n \sin(n\pi x / L) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$k_1 - k_2 = -\xi^2$ より，

$$k_1 = k_2 - \xi^2 = -(\lambda^2 + \xi^2) = -\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{L^2}\right) = -\frac{\pi^2}{L^2}(n^2 + m^2) < 0$$

式(2)から

$$T(t) = Ee^{\sqrt{k_1}t} + De^{-\sqrt{k_1}t} = Ee^{i\sqrt{-k_1}t} + De^{i\sqrt{-k_1}t} = (E + D)\cos\sqrt{-k_1}t + i(E - D)\sin\sqrt{-k_2}t$$

$k_1 = -\mu^2$ ($\mu > 0$)とおいて，

$$T_{nm}(t) = (E_{nm} + D_{nm})\cos\mu_{nm}t + i(E_{nm} - D_{nm})\sin\mu_{nm}t \quad (n, m = 1, 2, \cdots)$$

ただし，$\mu = (\pi / L)\sqrt{n^2 + m^2}$

$$u_{nm}(x, y, t) = X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t)$$

$$= \sin(n\pi x / L)\sin(m\pi y / L)(a_{nm}\cos\mu_{nm}t + b_{nm}\sin\mu_{nm}t) \quad (n, m = 1, 2, \cdots)$$

ここで，$a_{nm} = (2iC_n)(2iA_{nm})(E_{nm} + D_{nm})$，$b_{nm} = (2iC_n)(2iA_m)i(E_{nm} - D_{nm})$．

したがって，線形方程式の解の重ね合わせの性質から，

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}(a_{nm}\cos\mu_{nm}t + b_{nm}\sin\mu_{nm}t)$$

また，

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}(-a_{nm}\sin\mu_{nm}t + b_{nm}\cos\mu_{nm}t)$$

初期条件から

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L} = x(L - x)\sin\frac{3\pi y}{L} \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}b_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin my = 0 \tag{8}$$

式(7)の両辺に $\sin(n_1\pi x/L)\sin(m_1\pi y/L)$ を掛けて， $x=0\sim L$， $y=0\sim L$ まで積分すると，

$$\int_0^L\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dxdy=\int_0^L\int_0^L x(L-x)\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{3\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dxdy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\int_0^L\left(\int_0^L\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dy\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\int_0^L\left(\int_0^L\sin\frac{3\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dy\right)x(L-x)\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx \tag{9}$$

ここで，

$$\int_0^L\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dy=\begin{cases}L/2 & (m=m_1)\\ 0 & (m\neq m_1)\end{cases},\qquad \int_0^L\sin\frac{3\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dy=\begin{cases}L/2 & (m_1=3)\\ 0 & (m_1\neq 3)\end{cases}$$

であるので，式(9)は次のようになる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm_1}\int_0^L\frac{L}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\int_0^L\left(\int_0^L\sin\frac{3\pi y}{L}\sin\frac{m_1\pi y}{L}dy\right)x(L-x)\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,3}\frac{L}{2}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\int_0^L\frac{L}{2}x(L-x)\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx \tag{10}$$

また，

$$\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx=\begin{cases}L/2 & (n=n_1)\\ 0 & (n\neq n_1)\end{cases}$$

から，

$$\begin{aligned}a_{n_1,3}\frac{L}{2}&=\int_0^{\pi}x(L-x)\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx\\ &=\left[-\frac{x(L-x)L}{n_1\pi}\cos\frac{n_1\pi x}{L}\right]_0^L+\int_0^L\frac{(L-2x)L}{n_1\pi}\cos\frac{n_1\pi x}{L}dx\\ &=\frac{L}{n_1\pi}\left[\frac{(L-2x)L}{n_1\pi}\sin\frac{n_1\pi x}{L}\right]_0^L+\frac{L}{n_1\pi}\int_0^L\frac{2L}{n_1\pi}\sin\frac{n_1\pi x}{L}dx\\ &=\frac{2L^2}{{n_1}^2\pi^2}\left[-\frac{L}{n_1\pi}\cos\frac{n_1\pi x}{L}\right]_0^L=\frac{2L^3}{{n_1}^3\pi^3}(1-\cos n_1\pi)=\frac{2L^3}{{n_1}^3\pi^3}(1-(-1)^{n_1})\end{aligned}$$

よって， $a_{n_1,3}=\dfrac{4L^2}{{n_1}^3\pi^3}(1-(-1)^{n_1})$ となり， a_{nm} は次のようになる．

$$a_{n,3}=\frac{4L^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n),\quad a_{n,m}=0(m\neq 3)$$

式(9)より，全ての n， m について

$$b_{nm}=0$$

$\mu=\sqrt{(n^2\pi^2/L^2)+m^2}$ より， $\mu_{n,3}=\sqrt{(n^2\pi^2/L^2)+9}$ ．

以上より，求める解は次のようになる．

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{3\pi y}{L}\cos\sqrt{(n^2\pi^2/L^2)+9t}$$