応用数学 II 及び演習 A&B（偏微分方程式）演習【課題】（12 月 26 日）

〇2006 年 1 月 10 日火曜日午後 6 時 00 分までに提出すること

〇解答は A4 レポート用紙を使用すること

〇解答が複数枚になる場合は，ホッチキスで綴じること

〇他人の答案を写し書きした場合はゼロ点とする

13. 偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ $(0\le x\le 1、\ 0\le t)$ ついて以下の問いに答えよ.

(イ)変数分離法を用いて，与式を常微分方程式に変換せよ.

(ロ)常微分方程式の一般解を求めよ.

(ハ)境界条件 $\varphi(0,t)=0$， $\dfrac{\partial\varphi(1,t)}{\partial x}=0$ と初期条件 $\varphi(x,0)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi x\right)$ を満たす解 $\varphi(x,t)$ を求めよ.

（解）

(イ)変数分離法により $\varphi(x,t)=X(x)T(t)$ とおくと，

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}(X(x)T(t))=\frac{d^2X(x)}{dx^2}T(t)=X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t))=X(x)\frac{dT(t)}{dt}=X(x)T'(t)$$

よって，与式は

$$X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$$

$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ とおいて

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}$$

x と t は独立変数であるので、この関係が常に成立するためには,

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=\mu，\ \text{ただし}\ \mu\ \text{は未定定数}$$

とならなければならない．したがって，与式は次の 2 つの常微分方程式となる.

$$T'-\mu T=0 \tag{1}$$

$$X''-\mu X=0 \tag{2}$$

(ロ) 未定定数 μ の値に応じて以下の 2 通りに分かれる.

(i) $\mu=0$ のとき

式(1)と(2)の一般解は次式で与えられる。

$$X=Ax+B \tag{3}$$

$$T=C \tag{4}$$

ただし， A， B， C は未定定数．式(3)と(4)より，$\mu=0$ のときの一般解は

$$\varphi(x,t)=ax+b \tag{5}$$

ただし， a， b は未定定数（$a=AC$， $b=BD$）.

(ii)　$\mu \neq 0$ のとき

式(6)と(7)の一般解は次式で与えられる。

$$X = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{\sqrt{-\mu}x} \qquad (6)$$

$$T = Ce^{\mu t} \qquad (7)$$

ただし，A，B，C は未定定数．式(11)と(12)より，$\mu \neq 0$ のときの一般解は

$$\varphi(x,t) = \left(ae^{\sqrt{\mu}x} + be^{-\sqrt{\mu}x}\right)e^{\mu t} \qquad (8)$$

ただし，a，b は未定定数（$a = AC$，$b = BD$）.

(ハ)境界条件、初期条件を満足する解を求める.

$\mu = 0$ の場合，境界条件 $\varphi(0,t) = 0$，$\dfrac{\partial\varphi(1,t)}{\partial x} = 0$ を考慮すれば，式(5)より $a = b = 0$ となり，$\varphi(x,t)$ は常に 0 となり，不適である.

$\mu \neq 0$ の場合を考える．式(8)より

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} = \sqrt{\mu}\left(ae^{\sqrt{\mu}x} - be^{-\sqrt{\mu}x}\right)e^{\mu t}$$

境界条件 $\varphi(0,t) = 0$，$\dfrac{\partial\varphi(1,t)}{\partial x} = 0$ を考慮すると，

$$\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial x} = (a+b)e^{\mu t} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\varphi(1,t)}{\partial x} = \sqrt{\mu}\left(ae^{\sqrt{\mu}} - be^{-\sqrt{\mu}}\right)e^{\mu t} = 0 \qquad (10)$$

よって，

$$a = -b$$

$$a\left(e^{\sqrt{\mu}} + e^{-\sqrt{\mu}}\right) = 0 \qquad (11)$$

$a = -b = 0$ ならば，$\varphi(x,t)$ は常に 0 となり，不適である.

よって，$a = -b \neq 0$ であり，式(11)から

$$e^{\sqrt{\mu}} + e^{-\sqrt{\mu}} = 0 \qquad (12)$$

$\mu > 0$ の場合には式(12)は成立たないので，$\mu < 0$．式(12)より

$$e^{\sqrt{\mu}} + e^{-\sqrt{\mu}} = e^{i\sqrt{-\mu}} + e^{-i\sqrt{-\mu}} = 2\cos\sqrt{-\mu} = 0$$

$\cos\sqrt{-\mu} = 0$ を与える $\sqrt{-\mu}$ の値は次式で与えられる.

$$\sqrt{-\mu} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty) \qquad (13)$$

これを式(8)に代入して，$\varphi(x,t)$ および未定定数に添え字 n をつけると，

$$\varphi_n(x,t)=a_n\left(e^{i\sqrt{-\mu}x}-e^{-i\sqrt{-\mu}x}\right)e^{\mu t}$$

$$=2ia_n\sin\sqrt{-\mu}\,xe^{\mu t}$$

$$=A_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \infty)\qquad(14)$$

ここで，$A_n=2ia_n$とおいた．線形方程式の解の重ね合わせの法則より，境界条件を満たす$\varphi(x,t)$の一般解は次式で与えられる．

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}\qquad(15)$$

ただし，A_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \infty$)は未定定数.
初期条件より

$$\varphi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}=\sin\frac{3\pi x}{2}\qquad(16)$$

式(16)が成立つためには，$n=2$のとき，$A_2=1$，$n=1$以外の全ての項で$A_n=0$でなければならない.
また，以上より、求める解は

$$\varphi(x,t)=\sin\frac{3\pi x}{2}e^{-\frac{9\pi^2}{4}t}$$

14. 偏微分方程式 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ ($0\le x\le 1$、$0\le t$) ついて以下の問いに答えよ.

(イ)解$\varphi=\varphi(x,t)$を，境界条件$\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0$と初期条件$\varphi(x,0)=\sin(4\pi x)$，$\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}=sin(\pi x)$のもとで解け.

(ロ)(イ)で求めた解に対して$\varphi\left(\frac{1}{2},t\right)$と$t$の関係を示すグラフの概形を描け.

（解）

(イ) まず一般解を求める。$\varphi(x,t)=0$は自明な一般解であり、境界条件を満たすが、初期条件を満たさないので不適である。

次に$\varphi(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$と変数分離すると、与えられた式より、$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k$となる。

$k=0$のときの一般解は、$T(t)=At+B$、$X(x)=Cx+D$であるが、境界条件より、$X(0)=C=0$、$X(x)=D=0$より、$\varphi(x,t)=0$となって不適である。
$k\neq 0$のときの一般解は、$T(t)=Ae^{\sqrt{k}t}+Be^{-\sqrt{k}t}$，$X(x)=Ce^{\sqrt{k}x}+De^{-\sqrt{k}x}$であり、境界条件より、

$$X(0)=C+D=0、\ X(1)=C(e^{\sqrt{k}}-e^{-\sqrt{k}})=0$$

であって、$C=-D\neq 0$であるためには、

$$e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}} = 0$$

が成り立たなければならない。k が正の実数のときには上式は成り立たないから、$k = -\lambda^2$、ただしλは正の実数とおくと、

$$e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}} = e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} = 2i\sin\lambda = 0$$

となる。これより、

$$\lambda_n = n\pi, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

を得る。よって、

$$T_n(t) = A_n e^{in\pi t} + B_n e^{-in\pi t} = (A_n + B_n)\cos n\pi t + i(A_n - B_n)\sin n\pi t$$

$$X_n(x) = C_n e^{in\pi x} - C_n e^{-in\pi x} = 2iC_n \sin n\pi t$$

となり、係数をまとめて、

$$\varphi_n(x,t) = (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x\text{、}\ n = 1,2,\cdots$$

となる。これより、解の重ね合わせを用いて、境界条件を満たす解は

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x$$

である。

次に初期条件を満たす解を求める。

$$\varphi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = \sin 4\pi x$$

である。sinmx をかけて 0 から 1 まで積分すると、級数に関しては

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\int_0^1 \{\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\} dx$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}, & (n = m) \\ 0, & (n \neq m) \end{cases}$$

となる。一方、

$$\int_0^1 \sin 4\pi x \sin m\pi x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \{\cos(4-m)\pi x - \cos(4+m)\pi x\} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & (m = 4) \\ 0, & (m \neq 4) \end{cases}$$

であるから、$n = m = 4$ のときのみ、係数は 0 ではない値 $a_4 = 1$ となり、$n \neq 4$ の場合の係数は $a_n = 0$ となる。よって、まず、

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 4\pi t + b_n \sin n\pi t)\sin n\pi x = \cos 4\pi t \sin 4\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \sin n\pi x$$

が定められる。次に、上式を t で偏微分すると、

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = -4\pi \sin 4\pi t \sin 4\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos n\pi t \sin n\pi x$$

であるから、

$$\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin n\pi x=\sin\pi x$$

となる。同様にして、$\sin m\pi x$ をかけて、0 から 1 まで積分すると、

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin n\pi x \sin m\pi x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi b_n}{2}\int_0^1\{\cos(n-m)\pi x-\cos(n+m)\pi x\}dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi b_n}{2}, & (n=m)\\ 0, & (n\neq m)\end{cases}$$

であり、

$$\int_0^1 \sin\pi x\sin m\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\{\cos(1-m)\pi x-\cos(1+m)\pi x\}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (m=1)\\ 0, & (m\neq 1)\end{cases}$$

なので、 $n=m=1$ のときのみ、係数は０ではない値 $b_1=\dfrac{1}{\pi}$ となり、 $n\neq 1$ のとき、係数は０となる。よって、

$$\varphi(x,t)=\cos 4\pi t\sin 4\pi x+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t\sin n\pi x=\cos 4\pi t\sin 4\pi x+\frac{1}{\pi}\sin\pi t\sin\pi x$$

を得る。

(ロ) 題意より

$$\varphi\left(\frac{1}{2},t\right)=\cos 4\pi t\sin 2\pi+\frac{1}{\pi}\sin\pi t\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$$

であるから、下の図のようになる。