平成 22 年度

応用数学Ⅱ及び演習 A&B　小テスト問題　(10 月 28 日)

筆記用具以外一切持ち込み不可.

問１．２つのベクトルを $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を辺に持つ平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を辺に持つ平行四辺形に垂直な単位ベクトルを求めよ.

問２．質点 m の運動が $\boldsymbol{r}=R(\cos\omega t)\boldsymbol{i}+R(\sin\omega t)\boldsymbol{j}$ という位置ベクトルで表されている．ただし, R と ω は定数（スカラー）であり, t は時刻を表す．以下の問いに答えよ.

(1) 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}=R(\cos\omega t)\boldsymbol{i}+R(\sin\omega t)\boldsymbol{j}$ に対して垂直であることを示せ.

(2) 加速度を $\boldsymbol{a}$ とする．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=0$ を示せ.

問 3．点 (－1, －1, 2) において，曲面 $xy^3z^2=4$ に対する垂直な単位ベクトルを求めよ.

（ヒント：与えられた曲面は　関数 $\phi=xy^3z^2$ の特別な同位曲面であると考える。この関数の勾配（gradient）は同位曲面に垂直であることを思い出す。）

問４．曲線 $\left(x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t\right)$ 上の，(a) 任意の点における接線方向の単位ベクトルを求めよ．(b) $t=2$ における曲線上の点の接線方向の単位ベクトルを表せ.

解答

１．
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

（１）　$S=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7$

（２）　$\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{S}=-\dfrac{3}{7}\boldsymbol{i}-\dfrac{2}{7}\boldsymbol{j}+\dfrac{6}{7}\boldsymbol{k}$

２．

（１）　$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=2\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$ 、一方、$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=R^2=$ 一定 であるので、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}=0$

（２）　$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=2\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ 、一方、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\omega^2R^2=$ 一定 であるので、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=0$

３．　$\nabla(xy^3z^2)=y^3z^2\boldsymbol{i}+3xy^2z^2\boldsymbol{j}+2xy^3z\boldsymbol{k}=0$

$\nabla(xy^3z^2)\Big|_{x=-1,y=-1,z=2}=-4\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=0$ 、$\boldsymbol{N}=\dfrac{-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{11}}$

４．　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}$

$$d\boldsymbol{r} = \{2t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + (4t-6)\boldsymbol{k}\}dt$$

(a) $$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|} = \frac{\{t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + (2t-3)\boldsymbol{k}\}dt}{\sqrt{\{t^2+4+(2t-3)^2\}(dt)^2}} = \frac{t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + (2t-3)\boldsymbol{k}}{\sqrt{5t^2-12t+13}}$$

(b) $$\boldsymbol{T}\Big|_{t=2} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + (2\times 2-3)\boldsymbol{k}}{\sqrt{5\times 2^2 - 12\times 2 + 13}} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{20-24+13}} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}$$