平成 22 年度　応用数学 II 及び演習　中間テスト問題（H22.11.25)

１．以下の各問いに答えよ。

（１）関数 $g(x)=(a^2-x^2)^{n/2}$ （ただし a は正の実数、n は定数で $0\le x\le a$ 、n が負のときには $0\le x<a$）の導関数 $\dfrac{dg}{dx}$ を求めよ。

（２）xy 平面内において $x\ge 0$ 、 $y\ge 0$ とする半径 a の半円内の領域を R とする。この領域において関数 $f(x,y)=x^2y^2$ が与えられるとき、 $\displaystyle\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}dxdy$ を求めよ。解答は xy 座標あるいは $x=r\cos\theta$ 、 $y=r\sin\theta$ とする極座標のいずれを用いて解いても良い。

（３）（２）の半円の境界を反時計回りに一周した経路を C とする。ただし、経路 C の始点は $(a,0)$ としてよい。このとき、関数 $f(x,y)=x^2y^2$ に対して $\displaystyle\int_C fdx$ を求め、 $\displaystyle\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}dxdy=-\int_C fdx$ となることを示せ。

（１）　$s=a^2-x^2$ とおいて、

$$\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}(a^2-x^2)^{n/2}=\frac{d}{ds}(s^{n/2})\frac{ds}{dx}=\frac{n}{2}s^{n.2-1}\times(-2x)=-nx(a^2-x^2)^{n/2-1}$$

（２）　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y$

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}dxdy=2\iint_R x^2ydxdy=2\int_0^a y\left\{\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}x^2dx\right\}dy=2\int_0^a y\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^a y(a^2-y^2)^{3/2}dy=\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{5}(a^2-y^2)^{5/2}\right]_0^a=\frac{4a^5}{15}$$

あるいは $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y=2r^3\cos^2\theta\sin\theta$ 、 $dA=rdrd\theta$ より

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}dA=2\int_0^\pi\int_0^a r^3\cos^2\theta\sin\theta rdrd\theta=2\int_0^a r^4dr\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{2a^5}{5}\int_1^{-1}\cos^2\theta d(\cos\theta)=\frac{2a^5}{5}\int_{-1}^1 t^2dt=\frac{4a^5}{15}$$

（３）

$$\int_C fdx=\int_a^{-a}x^2(a^2-x^2)dx+\int_{-a}^a x^2 0^2dx$$

$$=a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{-a}-\left[\frac{x^5}{5}\right]_a^{-a}=-\frac{2a^5}{3}+\frac{2a^5}{5}=-\frac{10-6}{15}a^5=-\frac{4a^5}{15}$$

２． $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 、 $r=|\boldsymbol{r}|$ 、 $\phi=r^n$ （ただし n は実数）とする。このとき、以下を計算せよ。

（１）∇r　　（２）$\nabla\phi$　　（３）$\nabla\cdot\phi\boldsymbol{r}$　　（３）$\nabla\times(\phi\boldsymbol{r})$

（１）　$\displaystyle\nabla r=\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}=\boldsymbol{i}\frac{x}{r}+\boldsymbol{j}\frac{y}{r}+\boldsymbol{k}\frac{z}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$

（２）　$\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}\, r^n = \dfrac{\partial}{\partial r}(r^n)\left(\boldsymbol{i}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial r}{\partial z}\right) = nr^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$

（３）

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\phi\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\, r^n\boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(r^n x\boldsymbol{i} + r^n y\boldsymbol{j} + r^n z\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(r^n x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^n y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^n z) = nr^{n-2}(x^2+y^2+z^2) + 3r^n = (n+3)r^n$$

（４）

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times r^n\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ r^n x & r^n y & r^n z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ r^n y & r^n z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ r^n z & r^n x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ r^n x & r^n y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \left\{z\frac{\partial}{\partial y}(r^n) - y\frac{\partial}{\partial z}(r^n)\right\}\boldsymbol{i} + \left\{x\frac{\partial}{\partial z}(r^n) - z\frac{\partial}{\partial x}(r^n)\right\}\boldsymbol{j} + \left\{y\frac{\partial}{\partial x}(r^n) - x\frac{\partial}{\partial y}(r^n)\right\}\boldsymbol{k}$$

$$= nr^{n-2}\{(zy-yz)\boldsymbol{i} + (xz-zx)\boldsymbol{j} + (yx-xy)\boldsymbol{k}\}$$

$$= 0$$

３．以下の各問いに答えよ。

（１）ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ を含む平面がある。この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。また、この平面において $\boldsymbol{A}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ。

（２）$x^2/4 + y^2/4 + z^2 = 1$ で表される曲面 S において、点 $\mathrm{P}\,(x, y, \sqrt{3}/2)$（ただし $y \geq 0$）における単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を x の関数として求めよ。

（３）原点 O を中心とする半径 r の球の面を S とする。面上の微小要素 dS において外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{N}$ とするとき、$\iint_S \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}dS$ を求めよ。ただし、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$、$r = |\boldsymbol{r}|$ である。

（４）点 $\mathrm{A}\,(a, a, a)$ を中心とする半径 a の球の面を S とするとき、$\iint_S \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}dS$ を求めよ。ただし、積分定理 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}dS = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dV$ を用いても良い。

（１）　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ より、

$\boldsymbol{N} = \dfrac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|} = \dfrac{-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$、

$\boldsymbol{N}' = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ として、

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{N}'\times\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{N}'\times\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{N}'\times\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{N}'\times\boldsymbol{A}|}\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right\}$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{N}'\times\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

（2） $\phi(x,y,z)=x^2/4+y^2/4+z^2$ とおくと、$\nabla\phi(x,y,z)=\dfrac{x}{2}\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{2}\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ である。これより、任意の点での

単位法線ベクトルは、$\boldsymbol{N}=\dfrac{1}{\sqrt{(x/2)^2+(y/2)^2+(2z)^2}}\left(\dfrac{x}{2}\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{2}\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}\right)$ となる。ここで $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ より、$x^2+y^2=1$ なので、$y\geq 0$ より、$y=\sqrt{1-x^2}$ として、

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\sqrt{x^2/4+(1-x^2)/4+3}}\left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}\right)=\frac{x}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\boldsymbol{k}$$

を得る。

（3） $\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ であるので、$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{1}{r^2}$ である。よって、$\iint_S\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}dS=\iint_S\dfrac{1}{r^2}dS$ となる。ここで

球面座標を用いると、$dS=r\sin\phi d\theta\times rd\phi=r^2d\theta\sin\phi d\phi$ であるので、

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}dS=\iint_S\frac{1}{r^2}dS=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\sin\phi d\phi=4\pi$$

となる。

（4） 球内の領域を V とすると、$\boldsymbol{r}/r^3$ は連続で微分可能である。よって、積分定理より、

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{N}dS=\iiint_V\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}dV=\iiint_V 0dV=0$$

となる。