平成23年度応用数学II及び演習A&B、ベクトル解析　小テスト

以下の問題は原点O(0,0,0)を原点とするx、y、z座標系において扱うものとする。

１．$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$、$r=|\boldsymbol{r}|$、$n$、$a$、$b$、$c$は定数とする。このとき以下を計算せよ。

（１）$\nabla(r^n)$　（２）$\nabla\cdot\dfrac{ax\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+cz\boldsymbol{k}}{r}$　（３）$\nabla\times\{a(y-z)\boldsymbol{i}+b(z-x)\boldsymbol{j}+c(x-y)\boldsymbol{k}\}$

２．点A(1,1,0)、B(0,2,1)、C(1,−1,3)があるとき、以下の各問に答えよ。

（１）△ABCの面積Sを求めよ。ならびに、OA、OB、OCに平行な辺からなる平行六面体の体積Vを求めよ。

（２）点A、B、Cを含む平面D_1の方程式を求めよ。

（３）平面D_1と$x+2y-z-5=0$で表される平面D_2の交線を表す単位ベクトル$\boldsymbol{e}$を求めよ。

（４）原点を中心とし平面D_1と接する球の表面の方程式$\phi(x,y,z)$を求めよ。

（５）（４）で求めた球の表面において、外向きの単位法線ベクトルが$(2/3,2/3,1/3)$となる点の座標を求めよ。

解答例

１．

（１）
$$\nabla(r^n)=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot r^n=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^n)=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times nr^{n-1}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

（２）
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{ax\boldsymbol{i}+by\boldsymbol{j}+cz\boldsymbol{k}}{r}&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\frac{ax\boldsymbol{i}+by\boldsymbol{j}+cz\boldsymbol{k}}{r}\\&=a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{a+b+c}{r}+ax\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+by\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+cz\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{a+b+c}{r}+\left(ax\frac{\partial r}{\partial x}+by\frac{\partial r}{\partial y}+cz\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{a+b+c}{r}+\frac{ax^2+by^2+cz^2}{r}\times\left(-\frac{1}{r^2}\right)\\&=\frac{a+b+c}{r}-\frac{ax^2+by^2+cz^2}{r^3}=\frac{a(y^2+z^2)+b(z^2+x^2)+c(x^2+y^2)}{r^3}\end{aligned}$$

（３）
$$\nabla\times\{a(y-z)\boldsymbol{i}+b(z-x)\boldsymbol{j}+c(x-y)\boldsymbol{k}\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\a(y-z)&b(z-x)&c(x-y)\end{vmatrix}$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\{c(x-y)\}-\frac{\partial}{\partial z}\{b(z-x)\}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\{a(y-z)\}-\frac{\partial}{\partial x}\{c(x-y)\}\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\{b(z-x)\}-\frac{\partial}{\partial y}\{a(y-z)\}\right]\boldsymbol{k}$$
$$=-(b+c)\boldsymbol{i}-(c+a)\boldsymbol{j}-(a+b)\boldsymbol{k}$$

２．

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,1,1)$ 、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,-2,3)$ 、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=(3+2)\boldsymbol{i}+(0+3)\boldsymbol{j}+(2-0)\boldsymbol{k}=5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+3^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+9+4}=\frac{1}{2}\sqrt{38}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=6+1+0-0-0+1=8$、$V=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=8$

（2）　A 点を始点として平面に含まれる点 $\mathrm{R}(x,y,z)$ を表す任意のベクトルは、

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(x-1,y-1,z)$$

である。これより平面の方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-1,y-1,z)\cdot(5,3,2)=5x-5+3y-3+2z=5x+3y+2z-8=0$$

で与えられる。

（3）　平面 D_2 の法線ベクトルは $(1,2-1)$ であるので、交線のベクトルは

$$(5,3,2)\times(1,2,-1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-3-4)\boldsymbol{i}+(2+5)\boldsymbol{j}+(10-3)\boldsymbol{k}=-7\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

に平行であることから、単位ベクトルは

$$\boldsymbol{e}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

である。

（4）　平面の法線ベクトルは $(5,3,2)$ であるので、$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(N_x,N_y,N_z)=(5m,3m,2m)$ とできる。これより、さらに平面 D_1 の方程式より、

$5N_x+3N_y+2N_z=25m+9m+4m=38m=8$ より、$m=\dfrac{4}{19}$

よって、球の半径は $\mathrm{ON}=\sqrt{(5m)^2+(3m)^2+(2m)^2}=m\sqrt{5^2+3^2+2^2}=\dfrac{4}{19}\sqrt{38}=\dfrac{8}{\sqrt{38}}$ である。これより、球面上の任意の点を表すベクトルを $\boldsymbol{R}=(x,y,z)$ とすると、$|\boldsymbol{R}|=\dfrac{8}{\sqrt{38}}$ であるので、球面の方程式は

$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=\dfrac{64}{38}=\dfrac{32}{19}$、あるいは、$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\dfrac{32}{19}=0$

となる。

（5）　$\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ より、単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、

$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{\nabla}\phi}{|\boldsymbol{\nabla}\phi|}=\dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{(x,y,z)}{\mathrm{ON}}=\dfrac{\sqrt{38}(x,y,z)}{8}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ より、$x=y=\dfrac{16}{3\sqrt{38}}$、$z=\dfrac{8}{3\sqrt{38}}$

となる。