科目	応用数学 II	種別	小テスト	実施日	H17.12.22
学年	年	学籍番号		氏名	

偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 　$(0 \le x \le 1,\ \ t \ge 0)$ 　について，以下の問に答えなさい。

（i）　変数分離法を用いて，$u(x,t)$ の一般解を求めよ

（ii）次の境界条件を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ．

$$u(0,t) = 0\ ,\quad u(1,t) = 0$$

（iii）（ii）の境界条件を満たし，かつ，次の初期条件を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ．

$$u(x,0) = \sin \pi x\ ,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2\pi \sin 2\pi x$$

（解答例）

（i）　$u(x,t) = X(x)T(t)$ とおくと，$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ ，$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$ となり，これらを与式に代入すると，

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

$u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0$ とおいて上式を除すと，$\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$ となり，この関係が常に成立するためには，$\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \mu$ （ただし μ は未定定数）とならなければならない．したがって，

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad (1)$$

$$T''(t) - \mu T(t) = 0 \qquad (2)$$

$\mu = 0$ のとき，式(1)の一般解は $X(x) = Ax + B$ ，式(2)の一般解は $T(t) = Ct + D$ となる．よって，

$u(x,t) = X(x)T(t) = (Ax + B)(Ct + D)$ 　（ただし，A ，B ，C ，D は未定定数）

$\mu \ne 0$ のとき，式(1)の一般解は $X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$ ，式(2)の一般解は $T(t) = Ce^{\sqrt{\mu}t} + De^{-\sqrt{\mu}t}$ となる．よって，

$u(x,t) = X(x)T(t) = (Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x})(Ce^{\sqrt{\mu}t} + De^{-\sqrt{\mu}t})$ 　（ただし，A ，B ，C ，D は未定定数）

（ii）$\mu = 0$ のとき，境界条件より，$u(0,t) = BT(t) = 0$ ，$u(1,t) = (A + B)T(t) = 0$ となる．

$T(t) \ne 0$ の場合も成立するためには，$A = B = 0$ ．よって，$u(x,t) = 0$ となって不適である．

$\mu \ne 0$ のとき，境界条件より，$u(0,t) = (A + B)T(t) = 0$ ，$u(1,t) = (Ae^{\sqrt{\mu}} + Be^{-\sqrt{\mu}})T(t) = 0$ となる．

$T(t) \ne 0$ の場合も成立するためには，$A + B = 0$ ，$Ae^{\sqrt{\mu}} + Be^{-\sqrt{\mu}} = 0$ となる必要がある．よって，

$$A = -B\ ,\quad A(e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}) = 0$$

$u(x,t) \ne 0$ であるためには $A = -B \ne 0$ であるから $e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}} = 0$ ．$\mu > 0$ のときには常に $e^{\sqrt{\mu}\ell} > e^{-\sqrt{\mu}\ell}$ なので，不適であり，$\mu < 0$ でなければならない．$\mu < 0$ のとき，$\lambda > 0$ である定数を用いて，$\mu = -\lambda^2 = (i\lambda)^2$ とおくと，

$$e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}} = e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} = 2i \sin \lambda = 0$$

上式が成り立つためには，$\lambda > 0$ より $\lambda = n\pi$ ，$n = 1, 2, \cdots$ ．したがって，

$$u(x,t) = X(x)T(t) = A(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x})(Ce^{\lambda t} + De^{-i\lambda t}) = A2i\sin\lambda x\{(C+D)\cos\lambda t + i(C-D)\sin\lambda t\}$$

$$= \sin n\pi x(a\cos n\pi t + b\sin n\pi t) \qquad （ただし，\ n = 1,2,\cdots）$$

ここで， $a = A2i(C+D)$ ， $b = A2ii(C-D)$ とおいた． $u(x,t)$ に添え字 n をつけると，

$$u_n(x,t) = \sin n\pi x(a_n\cos n\pi t + b_n\sin n\pi t)\ ,\quad n = 1,2,\cdots$$

解の重ね合わせの法則より，求める解は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x(a_n\cos n\pi t + b_n\sin n\pi t)$$

(iii) 初期条件より，

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = \sin \pi x$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi\sin n\pi x = 2\pi\sin 2\pi x$$

式(3)が成立つためには， $n = 1$ のとき， $a_1 = 1$ ， $n = 1$ 以外の項で全ての項で $a_n = 0$ でなければならない．また，式(4)が成立つためには， $n = 2$ のとき， $b_2 = 1$ ， $n = 2$ 以外の項で $b_n = 0$ とならなければならない．以上より、求める解は以下となる．

$$u(x,t) = \sin\pi x\cos\pi t + \sin 2\pi x \sin 2\pi t$$