ベクトル解析　演習問題１（教科書ページ 559－565 ならびに高校、基礎数学の復習）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何が含まれている問題では図面を描くこと

注意４：A4 レポートに書き、必ずホッチキスでとめること。

注意５：証明、提示、確認の問題は筋道がわかる略解にすること。それ以外は解答のみでよい。

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$、$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ とするとき、以下が成り立つことを証明せよ。

（１）$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}$　　（２）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

（２）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$

２．ベクトルの内積と外積に関してそれぞれ次の分配の法則が成り立つことを証明せよ。

（１）$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$　　（２）$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

３．原点を始点とする位置ベクトル $\boldsymbol{A}=(1,1,1)$、$\boldsymbol{B}=(1,1,0)$、$\boldsymbol{C}=(1,-4,5)$ がある。

（１）$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$、$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|$ を求めよ。

（２）ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ に沿った単位ベクトル $\boldsymbol{e_A}$、$\boldsymbol{e_B}$ を求めよ。

（３）ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角 θを rad の単位と deg の単位で求めよ。

（４）ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を辺とする平行四辺形の面積 S と四辺形に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

（５）ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の終点が通る直線 l 上の任意の点を表すベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。これを求めよ。

（６）原点から直線 l まで下ろした垂線と直線 l との交点を D とする。これを表すベクトル $\boldsymbol{D}$ を求めよ

（７）原点から直線 l までの距離 d を求めよ。

（８）ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ を辺とする平行 6 面体の体積 V を求めよ。

課題

４．以下の公式を証明せよ。ただし c は定数である。

（１）$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$　（２）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$　（３）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

（４）$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2}$　（５）$\boldsymbol{A}\cdot c\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$　（６）$\boldsymbol{A}\times c\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

５．以下の各問いに答えよ。

（１）$\boldsymbol{A}=x_A\boldsymbol{i}+y_A\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{B}=x_B\boldsymbol{i}+y_B\boldsymbol{j}$ であるとき、A から B に向かう単位ベクトル $\boldsymbol{f}$ を求めよ。また直線 AB 上の任意の点のベクトル $\boldsymbol{r}$ を求めよ。

（２）直線 AB を含む直線 l が x、y 軸と平行ではなく、x、y 軸とそれぞれ点 P、Q で交わるとき、これらの座標を求めよ。

（３）原点を始点とし、l 上の N 点を終点とする法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

６．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ がある。以下の各問に答えよ。

（１）$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角度を求めよ。

（２）$\boldsymbol{A}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e_A}$、$\boldsymbol{B}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e_B}$ を求めよ。

（３）$\boldsymbol{A}$ と x、y、z 軸となす角度をそれぞれ α_A、β_A、γ_A とし、$\boldsymbol{B}$ と x、y、z 軸となす角度をそれぞれ α_B、β_B、γ_B とする。これらの角度を deg の単位で求めよ。ただしそれぞれの角度は x、y、z 軸の正の向きから取った角度とする。

（４）$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{e_C}$ を求めよ。ただし $\boldsymbol{e_C}$ は z 軸と鋭角をなすものを選べ。また、$\boldsymbol{C}$ と x、y、z 軸となす角度をそれぞれ α_C、β_C、γ_C とするとするとき、これらの角度を deg の単位で求めよ。ただしそれぞれの角度は x、y、z 軸の正の向きから取った角度とする。

（５）$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ $\boldsymbol{e_A}$、$\boldsymbol{e_B}$、$\boldsymbol{e_C}$ を用いて表せ。

（６）$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{e_A}$、$\boldsymbol{e_B}$、$\boldsymbol{e_C}$ を用いて表せ。

（７）$\boldsymbol{e_A}$、$\boldsymbol{e_B}$、$\boldsymbol{e_C}$ に沿ってそれぞれ x'、y'、z'をとることにする。すなわち $\boldsymbol{r}=x'\boldsymbol{e}_A+y'\boldsymbol{e}_B+z'\boldsymbol{e}_C$ として、（６）の解と対応させて、xyz から $x'y'z'$座標に変換する際に

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表される座標変換行列$\{a_{ij}\}$ を求めよ。

（８）逆に（２）、（４）の結果を用いて、$\boldsymbol{r}=x'\boldsymbol{e}_A+y'\boldsymbol{e}_B+z'\boldsymbol{e}_C$ を $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ で表すことにより、$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ と対応させて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

で表される座標変換行列$\{b_{ij}\}$ を求めよ。

（９）$\{a_{ij}\}$ と $\{b_{ij}\}$ は互いに逆行列であることを確かめよ。

７．以下の各問に答えよ。

（１）原点を始点とし、同一平面に含まれない異なるベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ の終点をそれぞれ点 A、B、C とし、原点からこれらの点を含む面に垂直な線をおろしたとき、その交点 D をベクトル $\boldsymbol{D}$ で表すものとする。$\boldsymbol{D}$ はベクトル $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$ と平行であることを示せ。

（２）問題３に与えられたベクトルの成分を用いて、$\boldsymbol{E}$ を求めよ。

（３）（２）の場合に点 A、B、C を含む面上の任意の点を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ を求めよ。

（４）（２）の場合に $\boldsymbol{D}=m\boldsymbol{E}$ とおき、$\boldsymbol{D}$ は（３）も同時に満たすことから、$\boldsymbol{D}$ を求めよ。

８．$ax+by+cz=d$ （ただし $d\neq 0$）で表される平面がある。以下の各問に答えよ。

（１）平面が x、y、z と交わる点をそれぞれ A、B、C とするとき、それらの座標を求めよ。

（２）平面に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

（３）原点 O から平面に垂線を下ろしたとき、その交点のベクトル $\boldsymbol{D}$ を求めよ。

（４）原点から平面までの距離 L を求めよ。

ベクトル解析　演習問題２（教科書ページ565－572ならびに高校、基礎数学の復習）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１． $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ は固定された位置ベクトル（以下の問題では定ベクトルと略す）である。このとき以下を満足するベクトル $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の終点 (x, y, z) の軌跡はどのような図形を描くか、あるいはどのような領域の点を表すか（ただし、c は正の定数である）。

（１） $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A}| \le c$　　（２） $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A}) = 0$　　（３） $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A}) = 0$

２． $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$、 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$、 $\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z)$ である。以下の各問いに答えよ。

（１）行列 $\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix}$ の行列式 D を求めよ。

（２） $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は（１）の行列式で与えられることを示せ。

（３）$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \ne 0$ のとき、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ は一次独立であること（$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C} = 0$ を満たすのは $a = b = c = 0$ のときのみ）を示せ。

３．平面 D_1： $2x + 2y + z - 1 = 0$ 、平面 D_2： $-x + y + z + 1 = 0$ について次の各問いに答えよ。

（１）平面 D_1、D_2 を図示せよ。

（２）平面 D_1 の単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}_1$、平面 D_2 の単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}_2$、 $\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$ を求めよ。

（３）平面 D_1 と D_2 のなす角度 θ を rad、deg の単位でそれぞれ求めよ。

（４）平面 D_1 と D_2 に垂直な平面 D_3 に含まれる二つの異なるベクトルを $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ とするとき、$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2) = 0$ 、 $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2) = 0$ であることを図で示せ。

（５）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ が平行でない場合に平面 D_3 の法線ベクトルは $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と平行であること、および $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2) = 0$ であることを図で示せ。これらより、 $\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$ は平面 D_3 の法線ベクトルを表すことを示し、平面 D_3 の単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}_3$ を求めよ。

（６）平面 D_3 が点 $(1,1,1)$ を通るとき平面の方程式を求め、（１）の図に平面 D_3 を加えて描け。

課題

４． $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$、 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$、 $\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z)$ とする。以下の各問に答えよ。

（１） $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = -(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ が成り立つことを証明せよ。

（２） $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ とするとき、ベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ の幾何学的な関係を図示して説明せよ。

（３） $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ とするとき、 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = 0$ でなければ、 $\boldsymbol{D} \ne \boldsymbol{E}$ を図示して示せ。

４．以下の各問に答えよ。

（１）△ABC の各頂点を終点とするベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ を用いて、△ABC の面積 S を導け。

（２）△ABC の外接円の中心のベクトルを $\boldsymbol{G}$、半径を a とするとき、これが満たす条件を示せ。

（３） $\boldsymbol{A}=(1,0,0)$ 、 $\boldsymbol{B}=(0,2,0)$ 、 $\boldsymbol{C}=(0,0,3)$ であるとき、これらの終点を含む平面 D 上の任意の点のベクトル $\boldsymbol{R}$ を求めよ。

（４） $\boldsymbol{G}$ は平面 D に含まれることから、（４）の結果を利用して、$\boldsymbol{G}$、a を求めよ。

（５）外接円上の任意の点を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ をベクトル方程式で表し、xyz 成分で表される円の代数方程式を求めよ。

６．以下が成り立つことを証明せよ。

（１）平面 D_1 がベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ を含み、この平面に垂直な平面 D_2 がベクトル $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ を含むとき、

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=0$$

（２） $(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2\le({A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2)({B_x}^2+{B_y}^2+{B_z}^2)$

（３）任意の単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ が x、y、z 軸とそれぞれ α、β、γ の角度をなすとき、

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$、および、 $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha=0$

（※ $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ のことをベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向余弦という）

７．以下の各問いに答えよ。

（１） $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq0$ 、 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$ であるときそれぞれベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ はどのような幾何学的関係にあるか述べよ。

（２） $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq0$ のとき、$\boldsymbol{a}^*=\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$ 、 $\boldsymbol{b}^*=\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$ 、 $\boldsymbol{c}^*=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$ を定義する（これらを逆ベクトルという）。逆ベクトル $\boldsymbol{a}^*$、$\boldsymbol{b}^*$、$\boldsymbol{c}^*$ は $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ とどのような幾何学的関係にあるか。

（３） $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 、 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 、 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ のとき、これらに平行な辺をもつ平行６面体の体積 V を求めよ。

（４）（３）で与えられた $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ に対して逆ベクトル $\boldsymbol{a}^*$、$\boldsymbol{b}^*$、$\boldsymbol{c}^*$ を求めよ。

（５）（２）の一般的な場合において、 $\boldsymbol{K}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}+w\boldsymbol{c}$ 、 $\boldsymbol{r}^*=h\boldsymbol{a}^*+k\boldsymbol{b}^*+l\boldsymbol{c}^*$ であるとき、 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}^*$ を求めよ。

８． $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ は固定された位置ベクトル（以下の問題では定ベクトルと略す）である。このとき以下を満足するベクトル $\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の終点 (x,y,z) の軌跡はどのような図形を描くか、あるいはどのような領域の点を表すか。

（１） $(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})>0$ （２） $(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})=0$ （３） $\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})=0$

ベクトル解析　演習問題３（教科書ページ572－577）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何学が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．スカラー関数 $\phi=\phi(t)$、ベクトル関数 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(t)$、$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}(t)$ に t に関する導関数が存在する場合、以下が成り立つことを証明せよ。

（１）$\dfrac{d(\phi\boldsymbol{V})}{dt}=\dfrac{d\phi}{dt}\boldsymbol{V}+\phi\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}$　（２）$\dfrac{d(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{U}}{dt}\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}$　（３）$\dfrac{d(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{U}}{dt}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\times\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}$

２．空間内の曲線 C に沿って動く点を P とし、時刻 t における原点から点 P までのベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする。このとき以下の各問に答えよ。（ただし x、y、z は時間 t の関数であり、当然 $\boldsymbol{r}$ も t の関数であることに注意）

（１）微小時間 dt 後の位置を Q とし、そのベクトルを $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}=(x+dx)\boldsymbol{i}+(y+dy)\boldsymbol{j}+(z+dz)\boldsymbol{k}$ とする。点 P での速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ ならびに速度の大きさ $v=|\boldsymbol{v}|$ を x、y、z、t を用いて求めよ。

（２）曲線 C 上に座標 s を取り $ds=PQ$ とするとき、ds および $\dfrac{ds}{dt}$ を x、y、z、t を用いて求めよ。

（３）$|d\boldsymbol{r}|=ds$、$|d\boldsymbol{r}|=d|\boldsymbol{r}|$ が成り立つかどうか考えよ。また $\dfrac{dr}{dt}$ を x、y、z、t を用いて求め、$\dfrac{dr}{dt}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ が成り立つかどうか考えよ。

（４）$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\boldsymbol{v}$ となることを示せ。

（５）$\boldsymbol{T}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ は点 P における単位接線ベクトルであり、$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{T}$ であることを示せ。また、$\boldsymbol{T}$ を x、y、z を用いて示せ。

（６）同様にして時刻 t における点 P での速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$、微小時間 dt 後における点 Q での単位接線ベクトルを $\boldsymbol{T}+d\boldsymbol{T}$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ とする。点 P での加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ ならびにその大きさ $a=|\boldsymbol{a}|$ を x、y、z、t を用いて表せ。

（７）（２）、（５）の関係を用いて、$\boldsymbol{a}=\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+v^2\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ と表せることを示せ。

（８）$\boldsymbol{T}$ は単位ベクトルであることから、$\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ は $\boldsymbol{T}$ に垂直であることを示せ。また $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ は点 P、Q とそれらがはさむ曲線 C 上の線素 PQ を含む平面内に含まれ、点 P における曲線 C の法線となることを示せ。

課題

問題２の続き

（９）$\dfrac{dv}{dt}$ を x、y、z、t で表せ。また $a=\dfrac{dv}{dt}$ とできるかどうか考えよ。

（１０）$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\cdot\boldsymbol{a}$ であることを示し、v が 0 ではない一定値ならば、加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は 0 か曲線の法線方向に向いていることを示せ。

（１１）$x=R\cos\omega t$、$y=R\sin\omega t$、$z=0$（ただし半径 R と角速度 ωは一定）であるとき、ds、$\dfrac{ds}{dt}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{v}$、$\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$、$\boldsymbol{a}$、$a=|\boldsymbol{a}|$ を求めよ。

３．t のベクトル関数 $\boldsymbol{V}(t)$、$\boldsymbol{U}(t)$、$\boldsymbol{W}(t)$ について以下が成り立つことを証明せよ。

（１）$\dfrac{d\{\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})\}}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{U}}{dt}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})+\boldsymbol{U}\cdot\left(\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}\times\boldsymbol{W}\right)+\boldsymbol{U}\cdot\left(\boldsymbol{V}\times\dfrac{d\boldsymbol{W}}{dt}\right)$

（２）$\dfrac{d\{\boldsymbol{U}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})\}}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{U}}{dt}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})+\boldsymbol{U}\times\left(\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}\times\boldsymbol{W}\right)+\boldsymbol{U}\times\left(\boldsymbol{V}\times\dfrac{d\boldsymbol{W}}{dt}\right)$

４．$\boldsymbol{a}=(a,0,0)$、$\boldsymbol{b}=(0,b,0)$（ただし $a>b>0$）とする場合に、曲線 C 上を運動する質量 m の質点の時間 t における位置ベクトルが $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos kt+\boldsymbol{b}\sin kt$（ただし k は正の実数）で表されるものとする。このとき以下の各問に答えよ。

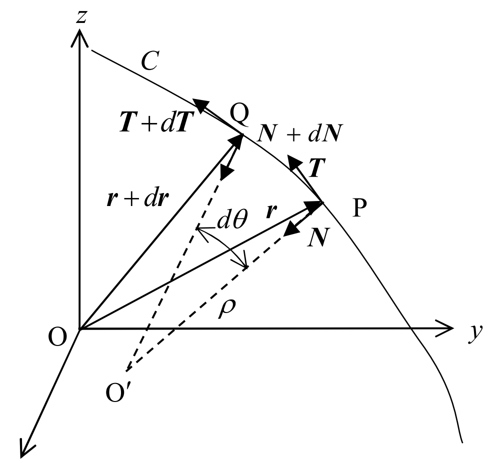
（１）質点の軌跡を図示せよ。また時間 t における単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ を求めよ。

（２）質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求め、その大きさが最大値 v_{max}、最小値 v_{min} となる位置とこれらの値を求めよ。

（２）運動量ベクトルを $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ とするとき、角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ が一定であることを示せ。また、角運動量ベクトルの方向を（１）の図中に示せ。

（３）質点に作用する力を $\boldsymbol{F}$ とすれば $\boldsymbol{F}=-mk^2\boldsymbol{r}$ で表される中心力であり、軌跡は微分方程式 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+k^2\boldsymbol{r}=0$ の解であることを示せ。

（４）一般に力 $\boldsymbol{F}$ のモーメントは $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ で定義されるが $\boldsymbol{M}=\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ とも表せることを示し、$\boldsymbol{F}$ が中心力である場合には $\boldsymbol{M}=0$ となることを示せ。



５．右の図を参照して、以下の各問に答えよ。

（１）連続な曲線 C に沿ってごく微小離れた点 PQ の距離を ds とする。このとき、弧 PQ を含む曲率半径 ρの扇形 O'PQ において点 P、Q をはさむ角度を $d\theta$とする。点 P での単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{r}$、ρ、θを用いて表せ。

（２）扇 O'PQ は点 P での単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$、点 Q での単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}+d\boldsymbol{T}$ を含む平面であることを示せ。

（３）扇 O'PQ の面内で凹側に向いた曲線上の単位法線ベク

トルを $\boldsymbol{N}$ とすれば、$\boldsymbol{N} = \dfrac{d\boldsymbol{T}}{|d\boldsymbol{T}|}$ となることを示せ。

（４）$d\theta = |d\boldsymbol{T}|$ であることを示せ。このことより、$\boldsymbol{N} = \rho\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ ならびに問題２の加速度は $\boldsymbol{a} = \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{T} + \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{N}$ で表されることを示せ。

６．$x = 3t^2$、$y = 10t$、$z = -4t^2$ で表される曲線 C がある。以下の各問に答えよ。

（１）曲線上の任意の点における単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ を求めよ。

（２）$\boldsymbol{N} = \dfrac{d\boldsymbol{T}}{|d\boldsymbol{T}|} = \dfrac{d\boldsymbol{T}/dt}{|d\boldsymbol{T}/dt|}$ であることを利用して、曲線の凹側に向く単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

（３）接線 $\boldsymbol{T}$ に垂直なもうひとつの単位法線ベクトルとして、陪法線（あるいは従法線）$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$ が定義される（$\boldsymbol{N}$ を主法線という）。これを求め、曲線 C、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$ とどのような幾何学的関係にあるか図示して説明せよ。

（４）点 $(6,10,-8)$ における $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ を求めよ。

７．xy 平面上に連続な曲線 C がある。以下の各問に答えよ。

（１）ごく微小離れた点 $\mathrm{P}(x, y)$、点 $\mathrm{Q}(x+dx, y+dy)$ 間の距離 ds ならびに $\dfrac{ds}{dx}$、$\dfrac{dx}{ds}$ を求めよ。

（２）$y + dy = y + \dfrac{dy}{dx}dx$ であることから $d\boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{i} + \dfrac{dy}{dx}\boldsymbol{j}\right)dx$ である。これを利用して単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ を導関数 dy/dx の関数として求めよ。

（３）$\boldsymbol{T}$ は z 軸の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ と垂直であることから、単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

（４）$\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ を求めよ。

（５）$\boldsymbol{N} = \rho\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}$ より、曲率半径 ρ ならびに曲率 K を求めよ。（ベクトルによらない答えは材料力学基礎のテキストにあるので比較すること）

ベクトル解析　演習問題４（教科書ページ 577-581）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何学が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 、$r = |\boldsymbol{r}|$ また r 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ とする。このとき以下を計算せよ。

（１）$\boldsymbol{\nabla}(xyz) = \mathrm{grad}(xyz)$　（２）$\dfrac{\partial r}{\partial x}$、$\dfrac{\partial r}{\partial y}$、$\dfrac{\partial r}{\partial z}$　（３）$\boldsymbol{\nabla} r = \mathrm{grad}\, r$

（４）$(\boldsymbol{\nabla} r)^2 = (\mathrm{grad}\, r)^2$　（５）$\boldsymbol{\nabla}(r^2) = \mathrm{grad}(r^2)$　（６）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{r}$

（７）$\boldsymbol{\nabla} \cdot (r\boldsymbol{r}) = \mathrm{div}(r\boldsymbol{r})$　（８）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{e_r} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{e_r}$　（９）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}(xyz) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}(xyz) = \boldsymbol{\nabla}^2(xyz)$

※スカラー関数 ϕ の勾配は $\mathrm{grad}\,\phi$、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ で表されることに注意。

２．以下の各問いに答えよ。

（１）ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の回転は以下で表されることを示せ。

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

※ベクトルの回転は $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ と表されることもある。

（２）問題 1 に与えられた $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{e}_r$ について、$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}$ 、$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{e}_r = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{e_r}$ を計算せよ。

（３）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0$ を証明せよ。

３．以下の各問に答えよ。

（１）$\phi(x, y, z) = c$ （ただし c は定数）で表される曲面において、$\boldsymbol{\nabla}\phi$ は点 (x, y, z) での法線ベクトルであることを示せ。また、この単位ベクトルを求めよ。

（２）$\boldsymbol{\nabla}\phi$ は点 (x, y, z) での任意の単位ベクトルに対して方向導関数の値（方向微分係数）が最も大きくなる場合を表すことを示せ。

課題

４．$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 、$r = |\boldsymbol{r}|$、定ベクトル $\boldsymbol{K} = K_x\boldsymbol{i} + K_y\boldsymbol{k} + K_z\boldsymbol{j}$ とする。以下を計算せよ。

（１）$\boldsymbol{\nabla}(\ln r)$　（２）$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})$　（３）$\boldsymbol{\nabla}\{\cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})\}$　（４）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\{\cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})\} = \boldsymbol{\nabla}^2 \cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})$

（５）$\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（６）$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（７）$\boldsymbol{\nabla}(r^n)$　（８）$\boldsymbol{\nabla} \cdot (r^n \boldsymbol{r})$

（９）$\boldsymbol{K} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r})$　（１０）$(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{r}$　（１１）$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{r})$

５．以下の各問いに答えよ。

（１）$\phi(x, y, z) = hx + ky + lz$ の点 A (A_x, A_y, A_z) における法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。また、点 A において

ベクトル $\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{i} + D_y\boldsymbol{k} + D_z\boldsymbol{j}$ で表される方向への方向導関数を求めよ。

（２） 点 A を含む平面 $\phi(x, y, z) = hx + ky + lz$ の方程式は $h(x - A_x) + k(y - A_y) + l(z - A_z) = 0$ で表されることを示せ。また原点から平面までの距離 d を求めよ。

（３）結晶学において面の指数はミラー指数 (hkl) で表される。ただし、面が単位格子を構成する基本ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ の辺と交差する時の交点をそれぞれ a/h、b/k、c/l とする（機械材料学基礎の教科書を参照のこと）。格子定数が等しく（$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = a$）各軸の間の角度が 90º の立方晶において、$(hkl)$ 面は $\phi(x, y, z) = hx + ky + lz = a$ とできること、ならびにこの面に垂直な方位は $[hkl]$ となることを示せ。また、(hkl) 面の間隔は $d_{hkl} = \dfrac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$ となることを示せ。

６．以下の各問に答えよ。

（１） スカラー関数 $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ がある。 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ 、 $G = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ を求めよ。

（２） 点 $(1,1,2)$ において f の $\boldsymbol{A} = -3\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ への方向導関数の値を求めよ。

（３） $g(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ で表される曲面 C を図示せよ。

（４） 点 $(1,1,2)$ における曲面 C の単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

７．以下の各問に答えよ。

（１） 真空中において原点に点電荷 Q がある場合、そのポテンシャルは $\phi = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r}$ で表される。ただし ε_o は真空の誘電率である。点 r の位置に点電荷 q がある場合、この点電荷に働く力ベクトル $\boldsymbol{F}$ ならびにその大きさ F、x、y、z 軸方向の成分 F_x、F_y、F_z を求めよ。

（２） 固体材料内の点 (x, y, z) を原点にもつ微小要素 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ において、x、y、z 方向の辺の弾性変形量がそれぞれ Δu_x、Δu_y、Δu_z であるとき、$\Delta V \to 0$ として点 (x, y, z) における x、y、z 方向のひずみ ε_x、ε_y、ε_z ならびに体積ひずみ ε_V を求めよ（微小な変形量の場合 $\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ であり、任意の位置の変形量に対して変位ベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ を用いて ε_V を表せ）。せん断変形では体積は変化しない。このことを数学的に表現せよ。

（３）xy 平面内において質量 m の質点が角速度 ω で半径 a の円軌道を反時計回りに周回している。なお、z 軸を回転軸とする回転ベクトルとして $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ を定義する。軌道上の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ における質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$、その大きさ v、その回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ 、ならびに角運動量ベクトル $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ を求めよ。

ベクトル解析　演習問題５（教科書ページ 582-592）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．スカラー関数 ϕ、χ ならびにベクトル関数 $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}$ 、$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ について以下を証明せよ（教科書の手順ではなく具体的に計算して導くこと）。

（１）$\boldsymbol{\nabla}(\phi\chi)=\phi\boldsymbol{\nabla}\chi+\chi\boldsymbol{\nabla}\phi$　　（２）$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{\nabla}^2\phi=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$　　（３）$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=0$

（４）$\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{u})=\phi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}\phi\times\boldsymbol{u}$　　（５）$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$　　（６）$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}=0$

２．$f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y}$ とするとき、以下の積分経路 C に対して $\int_C f(x,y)dx$ を求めよ。

（１）C は $y=x^2+2$ に沿って点 A$(0,2)$ から点 B$(1,3)$ にいたる経路。

（２）C は点 A から点 D$(0,3)$ にいたる直線を経た後、点 D から点 B にいたる直線に沿った経路。

（３）C は点 A から点 E$(1,2)$ にいたる直線を経た後、点 E から点 B にいたる直線に沿った経路。

課題

３．以下の各問に答えよ。

（１）スカラー関数 ϕ、ベクトル関数 $\boldsymbol{u}$ について $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{u}+\phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ が成り立つことを証明せよ。

（２）$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 、$r=|\boldsymbol{r}|$ とするとき、（１）の公式を用いて $\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\boldsymbol{r})$ を求めよ。

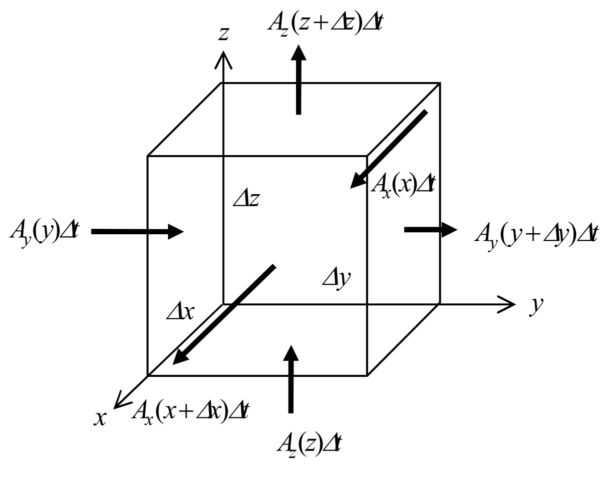
（３）$\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\boldsymbol{r})$ を直接計算して（２）の解と一致することを確かめよ。また、恒等的に $\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\boldsymbol{r})=0$ となる n の値を求めよ。

（４）ϕがスカラー関数であるとき、$\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{r})=0$ となることを証明せよ。（ヒント：$\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$、…となることに注目して計算する）

４．流れにおける連続の方程式（保存則）を導く。体積 $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ の微小要素において、Δt の時間で x、y、z 軸に沿って要素の面から入ってくる物質や熱の量をそれぞれ $A_x(x)\Delta t$ 、$A_y(y)\Delta t$ 、$A_z(z)\Delta t$ とし、出て行く量をそれぞれ $A_x(x+\Delta x)\Delta t$ 、$A_y(y+\Delta y)\Delta t$ 、$A_z(z+\Delta z)\Delta t$ とする。要素内に蓄積される量（あるいは要素から散逸する量）を ΔQ とすれば、以下の式が成り立つ。

$$\Delta Q=\{A_x(x)-A_x(x+\Delta x)\}\Delta t+\{A_y(y)-A_y(y+\Delta y)\}\Delta t+\{A_z(z)-A_z(z+\Delta z)\}\Delta t$$

このとき以下の各問に答えよ。



（１）x、y、z 方向の単位時間、単位面積あたりの流量（流束）をそれぞれ J_x、J_y、J_z とおくと、

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\{J_x(x)-J_x(x+\Delta x)\}\Delta y\Delta z+\{J_y(y)-J_y(y+\Delta y)\}\Delta z\Delta x+\{J_z(z)-J_z(z+\Delta z)\}\Delta x\Delta y$$

となることを示せ。

（２）テイラー展開 $J_x(x+\Delta x)=J_x+\frac{\partial J_x}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_x}{\partial x^2}\Delta x^2+\cdots$ を利用し、単位体積当りの蓄積量は $\Delta q=\Delta Q/\Delta V$ であることから、$\Delta V,\Delta t\to 0$ として、時間 t での点 (x,y,z) における物質や熱の蓄積率について以下が成り立つことを示せ。

$\frac{\partial q}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}$ 、ただし $\boldsymbol{J}=J_x\boldsymbol{i}+J_y\boldsymbol{k}+J_z\boldsymbol{j}$ は点 (x,y,z) での流束を表すベクトルである。

（３）流体の場合には、点 (x,y,z) での密度を ρ、x、y、z 方向の速度をそれぞれ v_x、v_y、v_z とすると、物質の生成（湧き出し）や消失がない場合に以下が成り立つことを示せ（流体力学の講義、テキストを参照）。

$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$ 、ただし $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{k}+v_z\boldsymbol{j}$ は点 (x,y,z) での流速を表すベクトルである。

（４）物質中での熱の伝導の場合には、熱流束は温度（T）の勾配と直線関係にあり

$\boldsymbol{J}=-k\boldsymbol{\nabla}T$　（これをフーリエの第 1 法則という）

で表される。ここで k は熱伝導率である。また単位体積当りの比熱を c とすれば、蓄積した熱量は温度変化 ΔT と $\Delta q=c\Delta T$ の関係にある。これらの関係より、比熱と熱伝導率が位置や時間によらず一定の値ならば、温度に対して

$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}++\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$　（これをフーリエの第 2 法則という）

が成り立つことを示せ（この方程式は偏微分方程式で学ぶ。ワイリー上巻を参照のこと）。

※なお、上と同様にして、固体中の点欠陥や自己原子、不純物原子の拡散ではそれらの濃度を C、拡散係数を D とすると、原子の流れは濃度勾配と直線関係にあり $\boldsymbol{J}=-D\boldsymbol{\nabla}C$（フィックの第 1 法則）で表され、また拡散係数が一定の値ならば $\frac{\partial C}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}++\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$（フィックの第 2 法則）が成り立つ（機械材料学基礎のテキストでは 1 次元の結果のみが書いてある）。

５．曲線 C が $x=a\cos t$ 、$y=a\sin t$ 、$z=bt$（ただし $a>b>0$ 、$0\le t\le\pi$）で表される。以下の各問に答えよ。

（１）この曲線を描け。

（２）曲線 C に沿って t の増加する方向に座標 s を取る。任意の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ ならびに $t+dt$ のときのごく微小離れた点 $\mathrm{Q}(x+dx,y+dy,z+dz)$ 間の距離 ds を dx、dy、dz、ならびに a、b、dt を用いて表せ。

（３）$d\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とする。$d\boldsymbol{r}$ と点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ における単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ を a、b、t、dt を用いて表せ。

（４）$f(x,y,z)=xy(2+z)$ であるとき、$\int_C f(x,y,z)ds$ を求めよ。

（５）中心力が $\boldsymbol{F}=A\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$ で与えられる時（A は定数）、経路 C に沿ってなされる仕事 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

ベクトル解析　演習問題６（教科書ページ 593-602）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何学が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．原点 O を中心とする楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の面積を求めたい。以下の各問に答えよ。

（１）楕円を一周する経路は $x=a\cos t$、 $y=b\sin t$ （$0\le t\le 2\pi$）で表されることを示せ。

（２）t における円周上の点 P がベクトル $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$、 $t+dt$ における円周上の点 Q がベクトル $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}=(x+dx)\boldsymbol{i}+(y+dy)\boldsymbol{j}$ で表されるとき、 $d\boldsymbol{r}$ を a, b, t、dt を用いて表せ。

（３）二つのベクトルの外積の大きさはそれらを辺とする平行四辺形の面積を表すことを利用して、△OPQ の面積 dS を x、y、dx、dy で表し、さらに a、b、t、dt を用いて表せ。

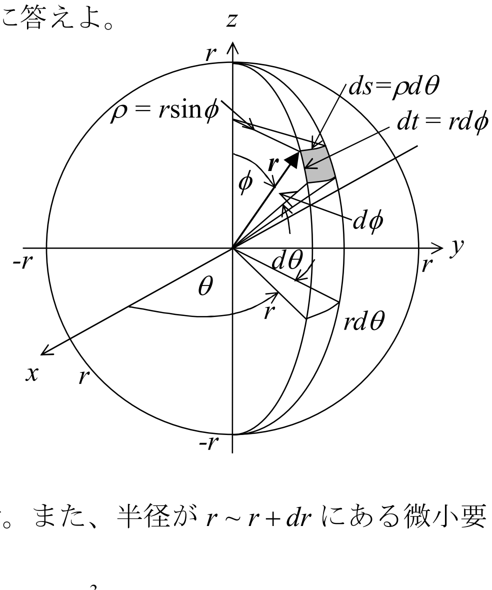
（４）（３）で得られた dS を積分して楕円の面積 S を求めよ。

（５）楕円内において辺が x、y 軸に沿った四角形の微小要素の面積は $dS=dxdy$ である。これを用いて $S=\iint_S dS$ の積分を実行して面積を求め、（４）の結果と同じになることを確かめよ。

（６）グリーンの補助定理（595、定理 1）において $V=x/2$、$U=-y/2$ と置くことにより、面積分は（５）で得られるもの、線積分は（４）で得られるものと同じになることを示せ。

（７）グリーンの補助定理を用いずに、一般に、xy 平面にある任意の閉曲線 C で囲まれた領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$ で表されることを示せ。

２．原点 O を中心とする球 $x^2+y^2+z^2=r^2$ について以下の各問に答えよ。



（１）ベクトル $\boldsymbol{r}$ の xy 平面の射影と x 軸とのなす角度を θ、$\boldsymbol{r}$ と z 軸とのなす角度を ϕ とするとき、

$x=r\cos\theta\sin\phi$、 $y=r\sin\theta\sin\phi$、 $z=r\cos\phi$

となることを示せ（r、θ、ϕ は球面座標である）。

（２）表面において緯線に沿って θ の増加する方向に s 座標、経線に沿って ϕ の増加する方向に t 座標を取ると、これらによって囲まれる微小要素の面積は

$dS=r^2\sin\phi d\phi d\theta$

となることを示せ。

（３）（２）より球の表面積は $S=\iint_S dS=4\pi r^2$ であることを示せ。また、半径が $r\sim r+dr$ にある微小要素の体積は $dV=dSdr$ であることから、球の体積は $V=\iiint_V dV=\dfrac{4\pi r^3}{3}$ であることを示せ。

（４） $dV=dxdydz$ を用いて $V=\iiint_V dV$ を実行し、（２）の結果と一致することを確かめよ。

課題

３．以下の各問に答えよ。

（１） $y = x + 1$（ただし $0 \le x \le 1$）に沿う経路 C に対して $\int_C 2x(y+1)dx - x^2 dy$ を求めよ。

（２）頂点が点 O $(0,0)$、点 A $(1,0)$、点 B $(1,1)$、点 C $(0,1)$ である四角形 OABC について、A 点から反時計回りに一周して再び A 点に戻る閉回路 C をとる。$\int_C 2x(y+1)dx - x^2 dy$ を求めよ。

（３）グリーンの補助定理を用いて（２）を解き、答えが同じかどうかを確かめよ。

（４）半円 $x^2 + y^2 = a^2$（ただし $x \ge 0$、$y \ge 0$）の周と x 軸の交点を結ぶ直線で構成された閉回路 C に対して、$\int_C 2x(y+1)dx - x^2 dy$ を求めよ。（ヒント：グリーンの補助定理を用い、極座標を用いて面積分を実行する）

４． $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$（ただし $z \ge 0$）で表される半径 a の半球がある。問題２を参考にして、以下の各問に答えよ。

（１）半球において点 A $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$、点 B $(0,0,a)$ を結ぶ経路 C について、点 A から座標 s を取るとき、$\int_C xyzds$ を求めよ。

（２）半球の表面 S に対して、$\iint_S (x+y+z)dS$ を求めよ。

（３）半球の体積 V に対して $\iiint_V x^2 z dV$ を求めよ。

５． $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$、$r = |\boldsymbol{r}|$ とき、発散定理（600 ページ、定理１）あるいはその証明の手順に従い、以下を証明せよ。

（１） $\iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r} dS = 3V$　　　（２） $\iint_S \phi \boldsymbol{N} dS = \iiint_V \nabla \phi dV$

（３）閉曲面 S と内部 V が原点を含まないとき、$\iint_S \boldsymbol{N} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dS = 0$

６．以下を証明せよ。

（１）領域 D において、$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \phi$ となるような関数 ϕ があるとき、D 内の曲線 C に沿っての線積分 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ は C の端点 A、B によって決定し、積分経路には無関係である。また、このとき、

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{\nabla} \phi \cdot d\boldsymbol{r} = \phi_B - \phi_A$$

となる。ここで $\boldsymbol{r}_A$、$\boldsymbol{r}_B$ はそれぞれ点 A、B のベクトル、ϕ_A と ϕ_B はそれぞれ点 A、B での ϕ の値である。

（２）C が閉曲線の場合には、$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ である。

ベクトル解析　演習問題７（教科書ページ 603-613）

注意１：ベクトル量は太字、スカラー量は細字で書くこと

注意２：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x、y、z 軸において正の向きに取った単位ベクトルとする

注意３：幾何学が含まれている問題では図面を描くこと

演習提出：時間内（教室）、課題提出：金曜日正午まで（材料工学実験室）

演習

１．$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 、$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。3 次元空間において以下の関数が連続ではない点、線あるいは領域を求めよ。

（１）$\dfrac{1}{x}$　（２）$\dfrac{1}{x^2+y^2}$　（３）$\dfrac{1}{x^2-y^2}$　（４）$\ln r$　（５）$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

２．$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 、$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。以下の各問いに答えよ。(H21 年度中間試験問題)

（１）真空中において原点 $(0,0,0)$ に固定された点電荷 Q があり、$\boldsymbol{r}$ の位置に点電荷 q があるとき、静電ポテンシャルエネルギーは $V = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r}$ （ε_0 は真空の誘電率）であり、点電荷 q に作用する力 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ 、また電場の強さ $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ で与えられる。$\boldsymbol{E}$ を求めよ。

（２）原点を内部に含まない体積 V の領域の表面 S について $\iint_S \boldsymbol{N}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}dS$ を求めよ。また、この結果を用いて $\iint_S \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}dS$ を求めよ。ただし $\boldsymbol{N}$ は微小面積要素 dS での外向きの単位法線ベクトルである。

（３）原点を中心とする半径 r' の球（体積 V'、表面 S'）について、$\iint_{S'} \dfrac{dS'}{r'^2}$ を計算せよ。

（４）原点を内部に含む体積 V の領域の表面 S について $\iint_S \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}dS$ を求めよ。

※ベクトル解析の電磁気学への応用は教科書 12.6 節に詳しい。

課題

３．$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 、$r = |\boldsymbol{r}|$ とし、原点を中心とする半径 a の球の表面を S とする。

（１）表面の微小要素 dS において外側に向く単位法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ を求めよ。

（２）$\phi(r) = -\dfrac{1}{r}$ のとき、面積分 $\iint_S \nabla\phi\cdot\boldsymbol{N}dS$ を求めよ。

４．ストークスの定理（605 ページ、定理４）について、まず 2 次元の場合の概略を考える。xy 平面において閉曲線 C_z で囲まれた領域 S_z においてベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x,y)$ は連続であり一次偏導関数を持ち、

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

で表されるものとする。このとき、グリーンの補助定理より、

$$\iint_{S_z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{C_z} Pdx + Qdy$$

が成り立つので、 $F_x = P$ 、 $F_y = Q$ と置きなおすと、 $dS_z = dxdy$ 、また閉曲線上の点を表すベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ として $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ より $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy$ なので、

$$\iint_{S_z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS_z = \int_{C_z} F_x dx + F_y dy = \int_{C_z} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。左辺の被積分項はベクトルの外積の z 成分であることがわかる。これを三次元のベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ に拡張すると、閉曲線 C で囲まれた領域 S において $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ が連続であり一次偏導関数を持つならば、

$$\iint_S \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{（ストークスの定理）}$$

が成り立つ（詳しくは教科書 605 ページ、定理 4 に関連した説明を参照のこと）。これを利用し、以下の各問に答えよ。

（1）C が閉曲線のとき $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ ならば、 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ となることを示せ。またこのとき S 内の任意の二点 A、B に対して、 $\int_{r_A}^{r_B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi_B - \phi_A$ となることを示せ。ただし $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ であり、 ϕ_A 、 ϕ_B はそれぞれ点 A、B における ϕ の値である。

（2）C が閉曲線のとき、 $\int_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ となることを示せ。

（3）C が閉曲線のとき、 $\int_C (u\boldsymbol{\nabla} v + v\boldsymbol{\nabla} u) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ が成り立つことを示せ。