

## ベクトル解析

## 1. ベクトルの復習

## 1-1. 空間ベクトル

ベクトル (vector) は、幾何学的概念や関係を数量化して扱いたい際に非常に便利であり、幾何学的関係を簡潔な表現であらわすことができる。例えば、3次元の直交座標系である  $xyz$  座標において、原点  $O$  を  $(0,0,0)$  とするとき、点  $P$  の位置が  $(x,y,z)$  であらわされるものとする。このとき、半径  $R$  の球の表面に点  $P$  がある条件は

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

である。一方、原点  $O$  から点  $P$  まで矢印を引いて作られるベクトル  $\vec{OP}$  を用いると

$$|\vec{OP}| = R$$

のように簡潔に表すことができる。この式の意味は、原点から引いたベクトル  $\vec{OP}$  の線分の長さは  $|\vec{OP}|$  であり、これが  $R$  で一定であるということである。

球内の空間であれば  $|\vec{OP}| < R$  であり、球外

の空間であれば  $|\vec{OP}| > R$  である。このように、ベ

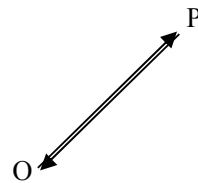
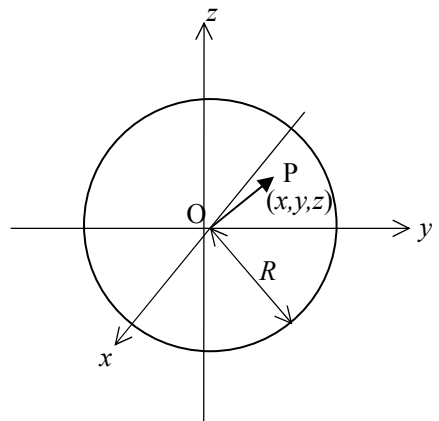
クトルは空間を表すことができるので、空間ベクトル (あるいは位置ベクトル) という場合がある。

我々は線分  $OP$  を逆にたどって、ベクトル  $\vec{PO}$  を作ることができる。 $\vec{PO}$  は  $\vec{OP}$  と同じ線分をもつが方向が逆転する。このとき、

$$\vec{PO} = -\vec{OP}$$

とし、負の符号で向きが逆であることを表す。

点  $P$  が原点  $O$  と一致するときには、ベクトルの線分の長さは  $0$  である。このように大きさが  $0$  であるベクトルを零ベクトルといい、単に  $\mathbf{0}$  で表す (あるいは  $\vec{0}$  と表すこともある)。点  $P$  が原点  $O$  と一致しない場合に、原点  $O$  から点  $P$  に行き、再び点  $P$  から原点  $O$  に復帰する作業は、



$$\vec{OP} + \vec{PO} = \vec{OO} = \mathbf{0}$$

となる。一方、点 P から原点 O に行き、再び原点 O から点 P に復帰する作業は

$$\vec{PO} + \vec{OP} = \vec{PP} = \mathbf{0}$$

と表される。いずれも結果は零ベクトルであるが、最終的な始点と終点はそれぞれ原点 O、点 P であって異なる。このようにベクトルの表す位置が重要な意義を持つ場合には、 $\vec{OP} + \vec{PO} = \vec{PO} + \vec{OP}$  とはならない。しかし、始点や終点の位置にこだわらないで良い場合にはいずれの場合も始点=終点であって、このことを  $\vec{OP} + \vec{PO} = \vec{PO} + \vec{OP} = \mathbf{0}$  で表すことになる。

上に示したベクトルは始点、終点の位置が規定される位置ベクトルであり、これを束縛ベクトルという。これに対して、ベクトルの大きさや方向のみが重要であり、その始点・終点の位置を問題にしない場合には、ベクトルは並進操作により移動可能である。このようなベクトルを自由ベクトルという。

### 1-2. ベクトルの基本的な性質

#### (1) 加減計算と成分表記

二つのベクトル  $A$  と  $B$  の加減は、

$$A + B = B + A, \quad A - B = -B + A$$

のように交換可能である。3次元空間を構成する座標の単位ベクトル（基本ベクトル）を

$$i = (1,0,0), \quad j = (0,1,0), \quad k = (0,0,1)$$

とすると、それぞれのベクトルは、

$$A = a_x i + a_y j + a_z k = (a_x, a_y, a_z)$$

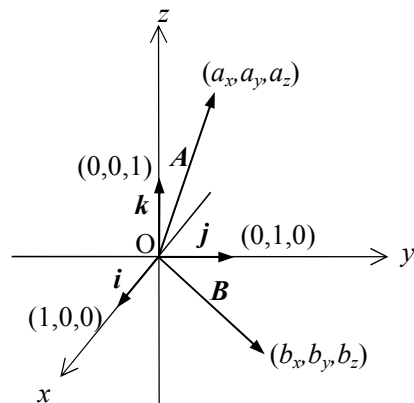
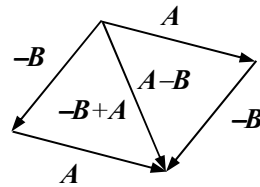
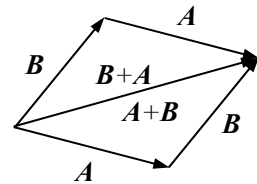
$$B = b_x i + b_y j + b_z k = (b_x, b_y, b_z)$$

のように成分で表現できる。3次元空間を表す  $xyz$  座標が直交座標系であるならば、それぞれのベクトルの大きさ（絶対値）は、

$$A = |A| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$B = |B| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

である。



## (2) ベクトルの内積

二つのベクトル  $A$ 、 $B$  のなす角を  $\theta$  とする。このとき、ベクトル  $A$  を  $B$  上へ垂直に射影した長さは  $|A| \cos \theta$  であり、これと  $B$  の大きさとの積を

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$$

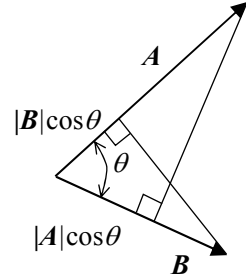
のように表記して、ベクトル  $A$  と  $B$  の内積 (inner product) と呼ぶ。ベクトル  $B$  を  $A$  上へ射影した長さは  $|B| \cos \theta$  であり、これと  $A$  の大きさの積も  $A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$  となる。内積はスカラー量を表すのでスカラー積 (scalar product) と呼ばれたり、積を  $\cdot$  で表すのでドットプロダクト (dot product) と呼ばれることもある。内積の定義より明らかなように

$$A \cdot B = B \cdot A$$

であって、積の順序は交換可能である。また、

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

の分配の法則が成り立つ。



証明：—

$D = B + C$  とすると、ベクトル  $D$  の  $A$  への射影長さは  $OE$  であり、

$$OE = \frac{A \cdot D}{|A|}$$

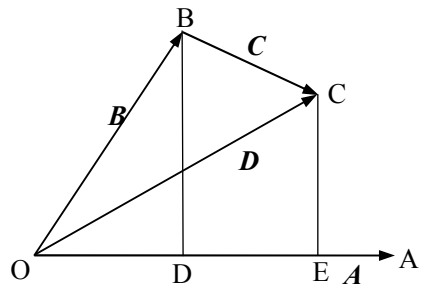
となる。一方、ベクトル  $B$  と  $C$  の  $A$  への射影長さはそれぞれ  $OD$ 、 $DE$  であって

$$OD = \frac{A \cdot B}{|A|}, \quad DE = \frac{A \cdot C}{|A|}$$

で与えられる。  $OE = OD + DE$  であるから明らかに

$$A \cdot D = A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

となる。



直交座標軸の単位ベクトルに関しては、

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$xyz$  座標が直交座標系であるとき、 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  とし、 $\mathbf{C} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} = (c_x, c_y, c_z)$  とおくと、

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z$$

が成り立つから、ベクトル  $\mathbf{C}$  の大きさは、

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$$

である。これらより、

$$\begin{aligned} C^2 - (A^2 + B^2) &= (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \\ &= 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{aligned}$$

を得る。ベクトル  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  の内積（スカラー積）として、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  を以下のように定義することもできる。

$$C^2 = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

これを用いると、

$$C^2 - (A^2 + B^2) = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

であって、先の式と比較すると、内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となることがわかる。

同様にして、 $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  とし、 $\mathbf{D} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} = (d_x, d_y, d_z)$  とおくと、

$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y, \quad d_z = a_z - b_z$$

が成り立つ。このときベクトル  $\mathbf{D}$  の大きさは、

$$D = |\mathbf{D}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2} = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

なので、

$$\begin{aligned} D^2 - (A^2 + B^2) &= (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \\ &= -2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{aligned}$$

となる。一方、内積を用いると  $D^2 = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  であるので、

$$D^2 - (A^2 + B^2) = -2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

を得る。先の式と比較すると、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となることがわかる。

三角形の余弦定理より、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角を  $\theta$  とすると、

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

であるので、先の成分表記と比較すると、内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

であって、ベクトル  $\mathbf{A}$  をベクトル  $\mathbf{B}$  に射影した長さ  $A \cos \theta$  とベクトル  $\mathbf{B}$  の大きさにかけたもの、あるいは、ベクトル  $\mathbf{B}$  をベクトル  $\mathbf{A}$  に射影した長さ  $B \cos \theta$  とベクトル  $\mathbf{A}$  の大きさにかけたものを意味する。逆に、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角  $\theta$  は、

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

となる。

## (2) 方向余弦

ベクトル  $\mathbf{A}$  に沿った単位長さのベクトル  $\mathbf{e}_A$  を考えると、

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{a_x}{A} \mathbf{i} + \frac{a_y}{A} \mathbf{j} + \frac{a_z}{A} \mathbf{k} = \left( \frac{a_x}{A}, \frac{a_y}{A}, \frac{a_z}{A} \right)$$

である。一方、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸とのなす角をそれぞれ  $\alpha_A$ 、 $\beta_A$ 、 $\gamma_A$  とすると、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = a_x = A \cos \alpha_A, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = a_y = A \cos \beta_A, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = a_z = A \cos \gamma_A$$

であるので、 $\mathbf{A}$  に沿った単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_A = \cos \alpha_A \mathbf{i} + \cos \beta_A \mathbf{j} + \cos \gamma_A \mathbf{k} = (\cos \alpha_A, \cos \beta_A, \cos \gamma_A)$$

と表すことができる。このとき、単位ベクトルの成分を方向余弦という。明らかに

$$|\mathbf{e}_A|^2 = \cos^2 \alpha_A + \cos^2 \beta_A + \cos^2 \gamma_A = 1$$

である。

ベクトル  $\mathbf{B}$  の単位ベクトルが

$$\mathbf{e}_B = \cos \alpha_B \mathbf{i} + \cos \beta_B \mathbf{j} + \cos \gamma_B \mathbf{k} = (\cos \alpha_B, \cos \beta_B, \cos \gamma_B)$$

で与えられるとき、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の内積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \left( \frac{\mathbf{A}}{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = AB (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B) \\ &= AB (\cos \alpha_A \cos \alpha_B + \cos \beta_A \cos \beta_B + \cos \gamma_A \cos \gamma_B) \end{aligned}$$

と表すことができる。よって、ベクトル  $A$  と  $B$  のなす角は

$$\cos\theta = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B = \cos\alpha_A \cos\alpha_B + \cos\beta_A \cos\beta_B + \cos\gamma_A \cos\gamma_B$$

で与えられる。

### (3) ベクトルの外積 (ベクトル積)

ベクトル  $A$  と  $B$  を辺とする平行四辺形の面積を  $S$  とすると、 $A$  と  $B$  のなす角が  $\theta$  のとき、

$$S = |A| |B| \sin\theta$$

となる。ここで、大きさ  $S$  をもち平行四辺形に垂直なベクトル  $S$  を以下のように定義する。

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

これをベクトルの外積 (outer product、ベクトル積 vector product、クロスプロダクト cross product) という。外積においては積の順番は重要である。ここでは反時計回りを正にする右ねじの法則に従うものとして定義する。すると、 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  は逆周りになって、反対向きのベクトル  $-\mathbf{S}$  を作ることになるので

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

であって非交換 (反交換) の関係となる。

明らかに、 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  のとき、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  となるのは、ベクトル  $A$  と  $B$  が平行で同じ向き ( $\theta = 0$ ) か逆向き ( $\theta = \pi$ ) のいずれかである。したがって、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  であるならば、外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は、平行ではないベクトル  $A$  と  $B$  を同時に含む平面を表すことになる。また、外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は  $A$  と  $B$  のいずれにも垂直なので、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

であり、 $A$  と  $B$  を同時に含む面内のベクトルを  $C$  とすれば、外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は  $C$  にも垂直なので、 $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$  となる。ここで、 $A$  と  $B$  を同時に含む面内のベクトルを  $C$  は、

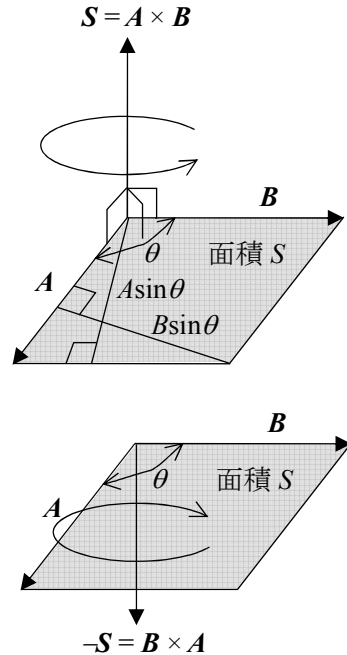
$$\mathbf{C} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}、\text{ただし } a, b \text{ は係数}$$

と書けるので、

$$(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = a\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + b\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

である。

次に、ベクトル  $A$  と  $B$  の外積において、 $A$  を  $B$  に平行なベクトル  $A_1$  と垂直なベクトル



ル  $A_2$  に分けて考えてみる。すなわち

$$A = A_1 + A_2$$

とする。これより、

$$A_1 \times B + A_2 \times B = A_2 \times B$$

を得る。また、 $A$  は  $A_2$  と  $B$  で作られる平面内にあるので、

$$A \cdot (A_2 \times B) = B \cdot (A_2 \times B) = 0$$

であって、 $A_2 \times B$  は  $A$  にも  $B$  にも垂直なベクトルである。よって、係数  $\lambda$  を用いて

$$A \times B = \lambda(A_2 \times B)$$

とかける。ここで  $|A_2| = |A| \sin \theta$  であり、 $|A \times B| = |A| |B| \sin \theta = |A_2| |B| = |A_2 \times B|$  であることから、 $\lambda = 1$  を得る。よって、

$$A \times B = A_2 \times B$$

である。このことの証明は図を用いるともっと簡便である。

外積では、以下の分配の法則が成り立つ。

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

証明：－

$$\begin{aligned} A \cdot (A \times B + A \times C) &= A \cdot A \times B + A \cdot A \times C \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ならびに、

$$\begin{aligned} (B + C) \cdot (A \times B + A \times C) &= (B + C) \cdot A \times B + (B + C) \cdot A \times C \\ &= B \cdot A \times B + C \cdot A \times B + B \cdot A \times C + C \cdot A \times C \\ &= 0 + C \cdot A \times B - C \cdot A \times B + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるので、 $A \times B + A \times C$  は  $A$  と  $B + C$  に垂直なベクトルである。よって、

$$A \times B + A \times C = \lambda \{A \times (B + C)\}$$

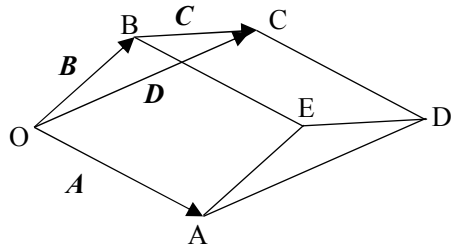
とおくことができる。ここで  $B$  との内積を取ると、左辺は

$$B \cdot (A \times B + A \times C) = B \cdot A \times B + B \cdot A \times C = 0 + B \cdot A \times C = B \cdot A \times C$$

となる。また、右辺は

$$\begin{aligned} B \cdot \{\lambda \{A \times (B + C)\}\} &= \lambda (B + C) \cdot (B \times A) = \lambda B \cdot (B \times A) + \lambda C \cdot (B \times A) \\ &= 0 + \lambda C \cdot (B \times A) = \lambda B \cdot (A \times C) \end{aligned}$$

となるので、 $\lambda = 1$  でなければならない。よって、



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{D}$$

である。

3次元直交座標系の  $xyz$  座標を表す単位ベクトル  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  は、 $xyz$  軸が右ねじの法則で取られているならば、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

の関係をとり、よって、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の外積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) \\ &\quad + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\ &\quad + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= -a_y b_x \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{j} + a_x b_y \mathbf{k} - a_z b_y \mathbf{i} - a_x b_z \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

で表される。行列式表示では、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

と表すことができる。

また、外積の定義より、二つのベクトルのなす角度は

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{AB} = |\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B|$$

で表される。ここで、 $\cos \theta = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B$  ならびに  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  より、

$$|\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B|^2 = 1 - (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B)^2, \quad \text{あるいは} \quad |\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B| = \sqrt{1 - (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B)^2}$$

の関係がある。

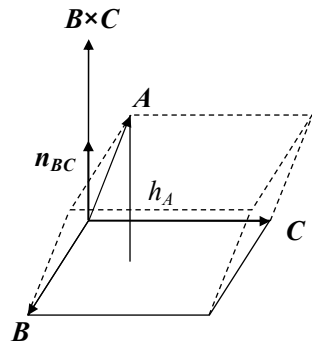
#### (4) スカラー三重積

右ねじの関係にある  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  のベクトルを辺とする平行6面体の体積を  $V$  とすると、

$$V = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

で与えられる。外積は反交換であるから、

$$V = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$





となる。

証明：－

ベクトル  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{C}$  を辺とする平行四辺形の面積を  $S_{BC}$  とすると、

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|} = S_{BC} \mathbf{n}_{BC}、\text{ただし、}\mathbf{n}_{BC} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|}$$

とできる。ここで  $\mathbf{n}_{BC}$  は、平行四辺形の単位法線ベクトルである。よって、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = S_{BC} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{BC} = S_{BC} h_A、\text{ただし、}\mathbf{h}_A = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{BC}$$

となる。ここで、 $h_A$  はベクトル  $\mathbf{A}$  を平行四辺形の垂直な軸に射影した高さであるので、 $S_{BC} h_A$  はベクトル  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  を辺とする平行六面体の体積  $V$  を表す。他の場合も同様にして証明される。

いま、任意のベクトル  $\mathbf{r}$  を、互いに平行ではない三つのベクトル  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  を用いて、

$$\mathbf{r} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}、\text{ただし、}\mathbf{a}、\mathbf{b}、\mathbf{c} \text{ は係数}$$

で表せるものとする。このとき、各係数は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = a\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = aV \text{ より、}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}{V}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = b\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = bV \text{ より、}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}}{V}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = c\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = cV、\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{V}$$

で与えられる。

※ 逆ベクトル

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})}、\mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})}、\mathbf{C}^* = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})}$$

で与えられるベクトルを考える。これらより、

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C} = 1$$

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{B} = 0$$

となる。このようなベクトルを逆ベクトルという。

これを用いると、 $\mathbf{r} = r_1 \mathbf{A} + r_2 \mathbf{B} + r_3 \mathbf{C}$ 、 $\mathbf{h} = h_1 \mathbf{A}^* + h_2 \mathbf{B}^* + h_3 \mathbf{C}^*$  のとき、

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = h_1 r_1 + h_2 r_2 + h_3 r_3$$

を得る。

## (5) ベクトル三重積

右ねじの関係にある  $A$ 、 $B$ 、 $C$  のベクトルを考える。このとき、 $S = A \times B$  とおくと、

$$(A \times B) \times C = S \times C$$

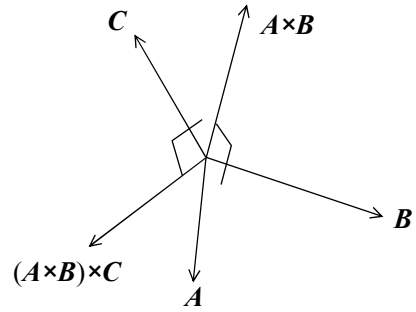
であって、上のベクトルは  $A$  と  $B$  の作る平面の法線ベクトル  $S$  と  $C$  の外積になる。ここで、 $S \times C$  で表されるベクトルは  $S$  に垂直になるので、 $A$  と  $B$  の作る平面に必ず含まれる。先の計算より

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

であるので、

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & a_y b_z - a_z b_y \\ c_z & c_x \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_z b_x c_z + a_y b_x c_y) \mathbf{i} + (a_x b_y c_x + a_z b_y c_z) \mathbf{j} + (a_y b_z c_y + a_x b_z c_x) \mathbf{k} \\ &\quad - (a_x b_z c_z + a_x b_y c_y) \mathbf{i} - (a_y b_x c_x + a_y b_z c_z) \mathbf{j} - (a_z b_y c_y + a_z b_x c_x) \mathbf{k} \\ &= (a_x b_x c_x + a_y b_x c_y + a_z b_x c_z) \mathbf{i} + (a_x b_y c_x + a_y b_y c_y + a_z b_y c_z) \mathbf{j} \\ &\quad + (a_x b_z c_x + a_y b_z c_y + a_z b_z c_z) \mathbf{k} \\ &\quad - (a_x b_x c_x + a_x b_y c_y + a_x b_z c_z) \mathbf{i} - (a_y b_x c_x + a_y b_y c_y + a_y b_z c_z) \mathbf{j} \\ &\quad - (a_z b_x c_x + a_z b_y c_y + a_z b_z c_z) \mathbf{k} \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x \mathbf{i} + (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_y \mathbf{j} \\ &\quad + (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_z \mathbf{k} \\ &\quad - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) a_x \mathbf{i} - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) a_y \mathbf{j} \\ &\quad - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) a_z \mathbf{k} \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &\quad - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \end{aligned}$$

を得る。



次に、 $A \times (B \times C)$  を考えてみる。この場合にも、ベクトル  $A \times (B \times C)$  は  $B \times C$  に垂直なので、 $B$  と  $C$  を含む平面内にあり、 $A$  に垂直なベクトルである。ベクトル成分で計算すると以下ようになる。

$$B \times C = (b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k}$$

なので、

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_x c_y - b_y c_x & b_y c_z - b_z c_y \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_y b_x c_y + a_z b_x c_z) \mathbf{i} + (a_z b_y c_z + a_x b_y c_x) \mathbf{j} + (a_x b_z c_x + a_y b_z c_y) \mathbf{k} \\ &\quad - (a_y b_y c_x + a_z b_z c_x) \mathbf{i} - (a_z b_z c_y + a_x b_x c_y) \mathbf{j} - (a_x b_x c_z + a_y b_y c_z) \mathbf{k} \\ &= (a_x b_x c_x + a_y b_x c_y + a_z b_x c_z) \mathbf{i} + (a_x b_y c_x + a_y b_y c_y + a_z b_y c_z) \mathbf{j} \\ &\quad + (a_x b_z c_x + a_y b_z c_y + a_z b_z c_z) \mathbf{k} \\ &\quad - (a_x b_x c_x + a_y b_y c_x + a_x b_z c_x) \mathbf{i} - (a_x b_x c_y + a_y b_y c_y + a_z b_z c_y) \mathbf{j} \\ &\quad - (a_x b_x c_x + a_y b_y c_y + a_z b_z c_z) \mathbf{k} \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &\quad - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \end{aligned}$$

を得る。

以上より、

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

であって、ベクトル三重積においては計算の順序が異なると違ったベクトルを表すことになる。

## 2. 1変数のベクトル関数

### (1) ベクトル関数と微分

ベクトル  $\mathbf{V}$  が変数  $t$  の関数で与えられ、xyz 直交座標系で

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(t) = V_x(t)\mathbf{i} + V_y(t)\mathbf{j} + V_z(t)\mathbf{k}$$

で成分表示されるものとする。これをベクトル関数といい、それぞれの成分が連続であれば、ベクトル関数は連続といえる。このとき、変数が  $t + \Delta t$  に変化した際には

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = V_x(t + \Delta t)\mathbf{i} + V_y(t + \Delta t)\mathbf{j} + V_z(t + \Delta t)\mathbf{k}$$

となる。これより、ベクトルの変化量は

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} &= \mathbf{V}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t) \\ &= \{V_x(t + \Delta t) - V_x(t)\}\mathbf{i} + \{V_y(t + \Delta t) - V_y(t)\}\mathbf{j} + \{V_z(t + \Delta t) - V_z(t)\}\mathbf{k} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\Delta V_x = V_x(t + \Delta t) - V_x(t), \quad \Delta V_y = V_y(t + \Delta t) - V_y(t), \quad \Delta V_z = V_z(t + \Delta t) - V_z(t)$$

とおくと、

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k}$$

である。ベクトルの変化率は

$$\frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t} \mathbf{k}$$

で与えられるので、

$\Delta t \rightarrow 0$  のとき、ベクトル関数の導関数

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t}$$

あるいは

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z}{\Delta t} \mathbf{k} = \frac{dV_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dV_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dV_z}{dt} \mathbf{k}$$

を得る。また、 $\Delta t \rightarrow 0$  での微分変化量として、

$$d\mathbf{V} = dV_x \mathbf{i} + dV_y \mathbf{j} + dV_z \mathbf{k}$$

を得る。

### (2) 導関数の性質

ベクトル関数の導関数には以下の性質がある。

$$\frac{d(k\mathbf{V}(t))}{dt} = k \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (\text{ただし } k \text{ は定数})$$

$$\frac{d(\mathbf{U}(t) \pm \mathbf{V}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)\mathbf{V}(t)) = \frac{d\phi}{dt}\mathbf{V} + \phi \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t)) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t)) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}(t) \cdot \{\mathbf{V}(t) \times \mathbf{W}(t)\}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) + \mathbf{U} \cdot \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{W} \right) + \mathbf{U} \cdot \left( \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}(t) \times \{\mathbf{V}(t) \times \mathbf{W}(t)\}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) + \mathbf{U} \times \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{W} \right) + \mathbf{U} \times \left( \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right)$$

### (3) 質点の運動

質点の位置が時間  $t$  の関数として原点からの位置ベクトル  $\mathbf{r}(t)$  で表されるものとする。微小時間  $dt$  間のベクトルの微小変化は  $d\mathbf{r}$  であって、速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

で与えられる。速度ベクトル  $\mathbf{v}$  は位置の変化量  $d\mathbf{r}$  と同じ向きであり、軌跡の接線方向に沿っている。すなわち、軌跡に沿った位置の変化量に対して微小線分  $ds$  をとると、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\mathbf{T}、\text{ただし、}\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

となる。ここで、 $v = ds/dt$  は接線方向の速度であり、 $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$  は接線方向の単位ベクトルである。

加速度は

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

で与えられる。また

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

と書き表すこともできる。ここで、 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$  であることから、

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

なので、 $d\mathbf{T}/ds$  は接線ベクトル  $\mathbf{T}$  に垂直である。

単位法線ベクトルを  $\mathbf{N}$  とすると、 $\mathbf{N} = k \frac{d\mathbf{T}}{ds}$  であり、

$$|d\mathbf{T}| = |\mathbf{T}| d\theta = d\theta$$

である。また、 $ds$  の曲率半径を  $\rho$  とすると、 $ds = \rho d\theta$  であるので、

$$|\mathbf{N}| = k \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = k \frac{|d\mathbf{T}|}{ds} = k \frac{d\theta}{\rho d\theta} = \frac{k}{\rho} = 1, \quad \therefore k = \rho$$

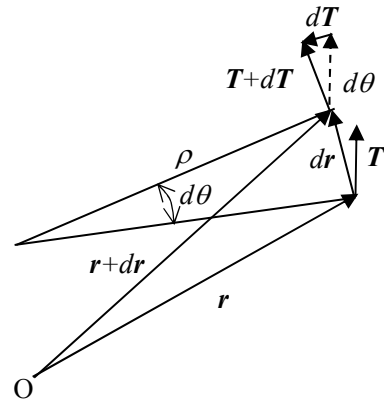
を得る。よって、

$$\mathbf{N} = \rho \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \quad \text{または、} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}$$

である。以上より、加速度は

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}$$

で表すことができる。右辺の最後の式の第1項は接線方向、すなわち、運動方向の加速度（接線加速度）を表す。第2項は軌跡に垂直な加速度成分である。



#### ※ 単位接線ベクトルと単位法線ベクトル

単位接線ベクトルの定義より、

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k}$$

とできる。ここで接線方向の方向余弦を  $\cos \alpha_T, \cos \beta_T, \cos \gamma_T$  とすると、

$$\mathbf{T} = \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{k} = \cos \alpha_T \mathbf{i} + \cos \beta_T \mathbf{j} + \cos \gamma_T \mathbf{k}$$

であるので、

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha_T, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \beta_T, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \gamma_T$$

を得る。また

$$|\mathbf{T}| = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = \cos^2 \alpha_T + \cos^2 \beta_T + \cos^2 \gamma_T = 1$$

である。

次に、単位法線ベクトルについて考えてみると

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathbf{N}}{\rho} \text{ より、 } \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}$$

であるので、

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

と表される。

一方、単位接線ベクトルと単位法線ベクトルを用いて、

$$\mathbf{b} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

を定義すると、このベクトルは接線と法線がなす平面に垂直な単位法線ベクトルとなる。これを従法線ベクトルと言う ( $\mathbf{N}$ のことを主法線ベクトルと言う)。

例) 楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の単位接線ベクトル、曲率半径、単位法線ベクトル

$x = a \cos t$ 、 $y = b \sin t$ 、ただし  $0 \leq t \leq 2\pi$  とおく。これより、

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t \text{ である。従って、}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t dt^2 + b^2 \cos^2 t dt^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

であり、 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = (-a \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j}) dt$  であるので、楕円の軌跡を反時計まわりに回るときの単位接線ベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \mathbf{i} + \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \mathbf{j} \\ &= \frac{ay/b}{\sqrt{a^2 y^2/b^2 + b^2 x^2/a^2}} \mathbf{i} + \frac{bx/a}{\sqrt{a^2 y^2/b^2 + b^2 x^2/a^2}} \mathbf{j} \\ &= \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \mathbf{i} + \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。

曲率半径を  $\rho$  とすると、単位法線ベクトルは  $\mathbf{N} = \rho \frac{d\mathbf{T}}{ds}$  である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left( \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \mathbf{i} + \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left( \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \mathbf{j} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \left( \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} - \frac{a \sin t (a^2 - b^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \left( \frac{-b \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} - \frac{b \cos t (a^2 - b^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right) \mathbf{j} \\ &= -\frac{a \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) - a (a^2 - b^2) \sin^2 t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \mathbf{i} \\ &\quad + \frac{-b \sin t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) - b (a^2 - b^2) \sin t \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \mathbf{j} \\ &= -\frac{ab^2 \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \mathbf{i} - \frac{a^2 b \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| &= \frac{\sqrt{a^2 b^4 \cos^2 t + a^4 b^2 \sin^2 t}}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} = \frac{ab \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \end{aligned}$$

であるので、単位法線ベクトルは

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = -\frac{b \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}} \mathbf{i} - \frac{a \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}} \mathbf{j}$$

で与えられる。また、曲率半径は

$$\rho = \frac{1}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

となる。以上を  $xy$  座標に直すと、単位法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\frac{bx/a}{\sqrt{b^2 x^2/a^2 + a^2 y^2/b^2}} \mathbf{i} - \frac{ay/b}{\sqrt{b^2 x^2/a^2 + a^2 y^2/b^2}} \mathbf{j} \\ &= -\frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \mathbf{i} - \frac{a^2 y}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \mathbf{j} \end{aligned}$$

であり、曲率半径は



$$\rho = \frac{(a^2 y^2 / b^2 + b^2 x^2 / a^2)^{3/2}}{ab} = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{a^4 b^4}$$

となる。このようにして得られた法線ベクトルは楕円の内側に向いている。

### 3. 演算子

#### (1) 勾配 (gradient)

##### 1) 勾配の定義

$x, y, z$  を変数とし、スカラー量で表される一回微分可能な関数  $\phi(x, y, z)$  があるとき、 $(x + dx, y + dy, z + dz)$  における関数の値は

$$\begin{aligned} \phi(x + dx, y + dy, z + dz) &= \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= \phi(x, y, z) + d\phi \end{aligned}$$

で与えられる。これより、スカラー関数の微小変化は

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

となる。ここで、

$$\text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

と定義すると、

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

と書くことができる。grad のように、関数にある作用を働きかけて所定の性質を持たせる数学的記号を演算子 (operator) という。

$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  であることに注意すると、

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r}$$

と書き直すことができる。また、上式を経路の微分要素  $ds$  で割ると、

$$\frac{d\phi}{ds} = \text{grad } \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad } \phi \cdot \mathbf{T}$$

となる。これを  $\phi$  の方向導関数と呼ぶ。

勾配は以下で表される  $\nabla$  (del デル、あるいは nabla ナブラ)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

により、

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi$$

と書くこともできる。

例)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  の勾配

$$\begin{aligned} \text{grad } r = \nabla r &= \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  は径方向の単位ベクトル。

例)  $\phi = 1/r$  の勾配

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

例)  $\phi = f(r)$  の勾配

$$\begin{aligned} \text{grad } f(r) = \nabla f(r) &= \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

例)  $\phi = f(x, y, z)g(x, y, z)$  の勾配

$$\begin{aligned} \text{grad}(fg) &= \nabla(fg) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(fg) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(fg) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(fg) \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} g + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} g + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} g + \mathbf{i} f \frac{\partial g}{\partial x} + \mathbf{j} f \frac{\partial g}{\partial y} + \mathbf{k} f \frac{\partial g}{\partial z} \\ &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) g + f \left( \mathbf{i} \frac{\partial g}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial g}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= g \nabla f + f \nabla g \end{aligned}$$

## 2) ポテンシャルエネルギーと力

ポテンシャルエネルギーがスカラー量  $\phi$  (スカラーポテンシャルという) で与えられるとき、力  $\mathbf{f}$  は

$$\mathbf{f} = -\text{grad} \phi = -\nabla \phi$$

で表される。これより、 $\mathbf{f} = \mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}$  とするとき、

$$f_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

である。同様にして、静電ポテンシャルが  $\phi$  で与えられるとき、電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi = -\nabla \phi$$

で与えられる。重力、静電ポテンシャルいずれも、

$$\phi = -\frac{c}{r}, \quad c \text{ は定数}$$

と書ける。これより、

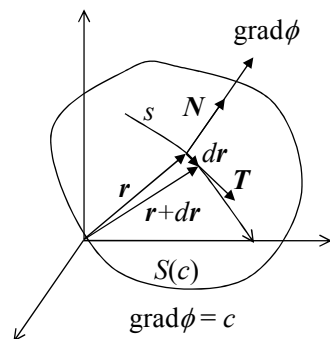
$$\mathbf{f} = -\nabla \phi = -\frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{c}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{c\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{c}{r^2} \mathbf{e}_r$$

で表される。この力は中心に向かっていることがわかる。

さて、 $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) = c$  ( $c$  は定数) であるような空間中の面  $S(c)$  を考える。すぐ上の静電ポテンシャルの例では、等電位面がこうした面にあたる。このとき面上の任意の経路  $s$  について、どの点でも

$$\text{grad} \phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つ。すなわち面上の単位接線ベクトル  $\mathbf{T}$  と



平行な  $d\mathbf{r}$  と  $\text{grad } \phi$  のなす角は垂直であって、 $\text{grad } \phi$  は面の法線方向のベクトルであることがわかる。

例)  $\phi = r^n$  とする。勾配は

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(r^n) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(r^n) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(r^n) = \mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(r^n) + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}(r^n) + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(r^n) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\right) = nr^{n-1}\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-1}\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_r$  は  $r$  方向の単位ベクトルであって、 $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$  である。

$r = a$  のとき  $\phi = a^n$  は一定であり、 $\nabla\phi = na^{n-1}\mathbf{e}_r$  であるので、法線方向は  $\mathbf{r}$  方向と一致し、 $\nabla\phi$  は  $r = a$  を半径とする球の表面で外向きに向いている大きさ  $na^{n-1}$  の法線ベクトルである。

このことは、 $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = nr^{n-1}\mathbf{e}_r \cdot Tds = nr^{n-1}dse_r \cdot \mathbf{T} = 0$  であることから容易にわかる。

### 3) 方向導関数

次に、 $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$  のとき、 $\mathbf{A} \cdot \nabla\phi$  を考える。

$$\mathbf{A} \cdot \nabla\phi = \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$$

において、 $\mathbf{A} \cdot \nabla$  をひとまとめの演算子として考えることが可能である。

今、任意の曲線上にとった経路の座標  $l$  に対して、距離  $\Delta l$  だけ離れた点 A、B を考える。また、A と B を結ぶベクトルを  $\mathbf{a}$  とする。このとき、

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{L}}{dl} = \frac{\partial x}{\partial l}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial l}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial l}\mathbf{k} = \cos\alpha_a\mathbf{i} + \cos\beta_a\mathbf{j} + \cos\gamma_a\mathbf{k}$$

とできる。ただし、 $\cos\alpha_a$ 、 $\cos\beta_a$ 、 $\cos\gamma_a$  は  $\mathbf{a}$  の方向余弦である。これより、

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial l}$$

となり、

$$\mathbf{a} \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l}$$

である。

$\mathbf{a}$  を単位接線ベクトルに置き換えると、

$$\mathbf{T} \cdot \nabla \phi = \left( \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

であって、接線方向の  $\phi$  の方向導関数である。また、法線方向に経路座標  $n$  をとると、

$$\mathbf{N} = \frac{\partial x}{\partial n} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial n} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial n} \mathbf{k} = \cos \alpha_n \mathbf{i} + \cos \beta_n \mathbf{j} + \cos \gamma_n \mathbf{k}$$

である。ここで、 $\cos \alpha_n$ 、 $\cos \beta_n$ 、 $\cos \gamma_n$  は法線の方向余弦である。従って、

$$\mathbf{N} \cdot \nabla \phi = \left( \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

となり、これは法線方向の  $\phi$  の方向導関数である。

#### 4) ラプラス演算子

$\nabla$  の内積は

$$\nabla \cdot \nabla = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる。これは、

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$$

と表され、ラプラス演算子 (Laplace operator) あるいはラプラシアン (Laplacian) と呼ばれる。ラプラス演算子は

$$\text{ラプラス方程式: } \nabla^2 \phi = 0$$

$$\text{ポアソン方程式: } \nabla^2 \phi = \rho(\mathbf{r})$$

$$\text{ヘルムホルツ方程式: } (\nabla^2 + k^2)\phi = 0, \quad k \text{ は定数}$$

などに表れ、物理の世界ではなくてはならない演算子である。

ヘルムホルツ方程式は、熱伝導、拡散、波動、振動を扱う偏微分方程式で出てくる。熱伝導、拡散方程式は、

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = c \nabla^2 u(\mathbf{r}, t), \quad c \text{ は正の定数}$$

で表される。 $u$  は熱伝導であれば温度、拡散であれば物質の量である。ここで  $u(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})T(t)$  と変数分離すると、

$$\phi \frac{\partial T}{\partial t} = c(\nabla^2 \phi)T$$

とできる。これより、両辺を  $\phi T$  で割って、

$$\frac{1}{c} \frac{dT/dt}{T} = \frac{\nabla^2 \phi}{\phi} = -k^2$$

を得る。これより、

$$\frac{dT(t)}{dt} + ck^2 T(t) = 0, \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$$

の二つの常微分方程式を解けばよい。後者はヘルムホルツ方程式である。

波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u(\mathbf{r}, t), \quad c \text{ は正の定数}$$

で表される。この場合も  $u(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})T(t)$  と変数分離すると、

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T/dt^2}{T} = \frac{\nabla^2 \phi}{\phi} = -k^2$$

とにおいて、

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 k^2 T = 0, \quad \nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (\text{ヘルムホルツ方程式})$$

の二つの常微分方程式を解くことになる。

## (2) 発散 (divergence)

### 1) 発散の定義

ベクトル  $\mathbf{A}$  が  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + A_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + A_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$  であるとき、

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k})$$

をベクトル  $\mathbf{A}$  の発散という。上の定義より、明らかに、

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

であり、発散はスカラー量を表す。

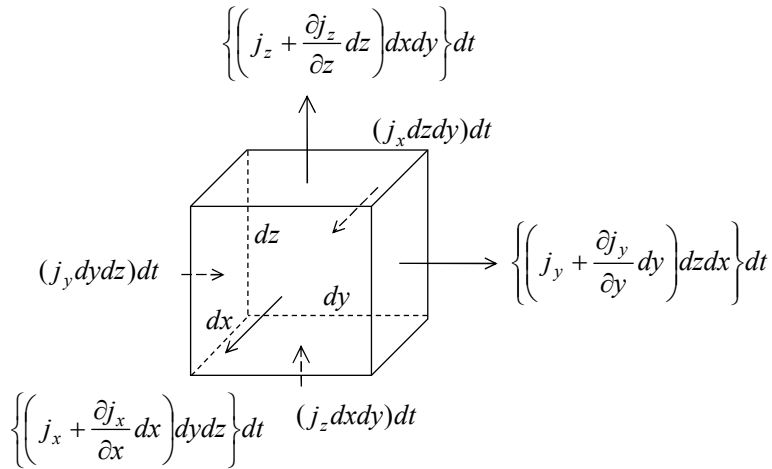
### 2) 流れにおける連続の式

単位時間、単位面積あたりのある物理量の流速を

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$$

で与える。ここ  $\mathbf{J}$  は  $x, y, z$  の関数である。

微小時間  $dt$  の間に微小体積要素  $dV = dx dy dz$  に入ってくる量を考えると、  
 $x$  軸方向は  $x$  軸に垂直な面の面積は  $dy dz$  であるので  $(J_x dy dz) dt$   
 $y$  軸方向は  $y$  軸に垂直な面積は  $dz dx$  であるので  $(J_y dz dx) dt$   
 $z$  軸方向は  $z$  軸に垂直な面積は  $dx dy$  であるので  $(J_z dx dy) dt$   
 であるので、微小要素に入ってくる総量は  
 $(J_x dy dz + J_y dz dx + J_z dx dy) dt$   
 となる。



同様にして、それぞれ  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  だけ離れた他の面からは

$$x \text{ 軸方向に } \left\{ \left( J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dy dz \right\} dt, \quad y \text{ 軸方向に } \left\{ \left( J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dz dx \right\} dt$$

$$z \text{ 軸方向に } \left\{ \left( J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right\} dt$$

だけ、出て行くことになり、その総量は

$$\left\{ \left( J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dz dx + \left( J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right\} dt$$

である。以上より、微小要素内に蓄積される量  $dU$  は、出る総量から入る総量を引いて、

$$\begin{aligned}
dU &= \left\{ \left( J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dzdx + \left( J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right) dxdy \right\} dt \\
&\quad - \{ (J_x dz) dydz + (J_y dz) dzdx + (J_z dz) dxdy \} dt \\
&= \left\{ \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dxdydz \right\} dt \\
&= \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dV dt \\
&= (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV dt
\end{aligned}$$

で与えられる。単位体積あたりの物理量を  $u$  とすると、微小要素内の変化量は  $dU = du dV$  であるので、上式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{J}$$

と書き換えることができる。物理量の変化がない場合には、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

となる。

流体の場合、連続の式における物理量を質量とすると、単位体積あたりの質量は密度  $\rho$  であるので  $u = \rho$  であり、流体の速度を  $\mathbf{v}$  として質量の流束は  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  である。よって

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

となる。質量の変化がない場合、すなわち質量が保存される場合には、

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

であり、密度が一定の非圧縮性流体では

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

となる。

### 3) 体積ひずみ

材料内において、 $x$  軸方向にとった微小要素  $AB$  を  $x \sim x + \Delta x$  とする。 $x$  軸法王に材料



に作用する力や応力により、微小要素の一端 A は  $x$  から点 A'、 $x + u_x$  までうごき、他端 B は  $x + \Delta x$  から点 B'、 $x + \Delta x + u_x + \Delta u_x$  まで動いたものとする。ここで、 $u_x$  は  $x$  軸方向の変位である。これより、変形後の微小要素のながさは、

$$A'B' = (x + \Delta x + u_x + \Delta u_x) - (x + u_x) = \Delta x + \Delta u_x$$

となる。従って、長さの変化は、 $A'B' - AB = (\Delta x + \Delta u_x) - \Delta x = \Delta u_x$  であり、要素の  $x$  軸方向のひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\Delta u_x}{\Delta x}$$

で与えられる。B 点を A 点に限りなく近づけると、A 点でのひずみ、

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

を得る。同様にして、 $y$  方向、 $z$  方向の変位をそれぞれ  $u_y$ 、 $u_z$  とすると、それぞれのひずみは、

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u_z}{\Delta z} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

となる。さて、変形前の点 A にある微小要素の体積は  $dV = dx dy dz$  であるが、変形後の体積は

$$\begin{aligned} dV' &= dx' dy' dz' = (1 + \varepsilon_x) dx \times (1 + \varepsilon_y) dy \times (1 + \varepsilon_z) dz \\ &= (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) dx dy dz \\ &= (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) dV \end{aligned}$$

である。

ひずみが非常に小さいときには、二次以上の微小項を無視して、体積ひずみを

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

で表すことができる。ここで変位をベクトルで表し、

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

とすると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

であるので、体積ひずみは

$$\varepsilon_V = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div} \mathbf{u}$$

となって、変位ベクトルの発散で表される。これより、 $\text{div} \mathbf{u} = 0$  のときには体積変化を伴わない変形、すなわち、せん断による変形のみを表すことになる。また、 $\text{div} \mathbf{u} \neq 0$  のときには体積変化を伴う変形を表す。

例えば、 $x$  軸方向の長さ  $l$  で、断面が  $a \times b$  の棒を軸方向に引っ張ったとき、棒の伸びを  $\lambda$  とすると、単位長さあたりの変位は  $\lambda/l$  なので、 $x$  軸方向の変位ならびにひずみは

$$u_x = \frac{\lambda}{l}x, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\lambda}{l}$$

となる。また、半径方向にはポアソン比  $\nu$  の割合だけ縮むことになり、 $y$ 、 $z$  軸方向の変位とひずみは、

$$u_y = -\nu \frac{\lambda}{l}y, \quad u_z = -\nu \frac{\lambda}{l}z$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\nu \frac{\lambda}{l} = -\nu \varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\nu \frac{\lambda}{l} = -\nu \varepsilon_x$$

となる。よって、変位ベクトルは、

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} = \frac{\lambda x}{l} \mathbf{i} - \frac{\nu \lambda y}{l} \mathbf{j} - \frac{\nu \lambda z}{l} \mathbf{k}$$

と表すことができる。これより、体積ひずみは

$$\varepsilon_v = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\lambda}{l} - \frac{\nu \lambda}{l} - \frac{\nu \lambda}{l} = (1 - 2\nu) \frac{\lambda}{l} = (1 - 2\nu) \varepsilon_x$$

である。

$x$  軸方向の純粋せん断変形を考えてみる。ここで、 $x$  軸方向の変位は高さ方向に沿って増加し、変位は

$$u_x = \frac{\lambda}{h}y = \tan \phi$$

で表される。また、 $y$ 、 $z$  軸方向の変位はないので、 $u_y = u_z = 0$  である。これらより、垂直ひずみは  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$  となり、 $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  は直ちにわかる。

$\mathbf{A} = \nabla \phi$  のときには

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

であることは容易にわかる。よってラプラス、ポアソン、ヘルムホルツ方程式は、

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = f(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) + k^2 \phi = 0$$

と書き直すことができる。

$\phi = ar^n$  のとき、

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= anr^{n-2}x\mathbf{i} + anr^{n-2}y\mathbf{j} + anr^{n-2}z\mathbf{k}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla\phi) &= \nabla^2\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (anr^{n-2}x\mathbf{i} + anr^{n-2}y\mathbf{j} + anr^{n-2}z\mathbf{k}) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x}(nr^{n-2}x) + a\frac{\partial}{\partial y}(nr^{n-2}y) + a\frac{\partial}{\partial z}(nr^{n-2}z) \\ &= a\left\{\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n-2})\frac{\partial r}{\partial x}\right\}x + anr^{n-2} + a\left\{\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n-2})\frac{\partial r}{\partial y}\right\}y + anr^{n-2} \\ &\quad + a\left\{\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n-2})\frac{\partial r}{\partial z}\right\}z + anr^{n-2} \\ &= an(n-2)r^{n-3}\frac{x^2}{r} + an(n-2)r^{n-3}\frac{y^2}{r} + an(n-2)r^{n-3}\frac{z^2}{r} + 3anr^{n-2} \\ &= an(n-2)r^{n-2} + 3anr^{n-2} \\ &= an(n+1)r^{n-2}\end{aligned}$$

を得る。

これより、特に、 $n=1$ のとき、

$$\phi = ar, \quad \nabla\phi = \frac{a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{r} = a\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{div}(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{2a}{r}$$

また、 $n=-1$ のとき、

$$\phi = \frac{a}{r}, \quad \nabla\phi = \frac{a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{r^3} = a\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \operatorname{div}(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0$$

となる。

$\phi = a \ln r$ のとき、

$$\nabla\phi = \nabla(a \ln r) = a\nabla \ln r$$

ここで、

$$\nabla \ln r = \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

なので、

$$\nabla\phi = \frac{a\mathbf{r}}{r^2}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\nabla\phi) &= \nabla^2\phi = \nabla\left(\frac{a\mathbf{r}}{r^2}\right) = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) + a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) + a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^2}\right) \\
 &= a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}x + a\frac{1}{r^2} + a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial y}y + a\frac{1}{r^2} + a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial z}z + a\frac{1}{r^2} \\
 &= -2a\frac{1}{r^3}\frac{x^2}{r} - 2a\frac{1}{r^3}\frac{y^2}{r} - 2a\frac{1}{r^3}\frac{z^2}{r} + \frac{3a}{r^2} = \frac{a}{r^2}
 \end{aligned}$$

となる。

次に、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \phi(r)\mathbf{B}(\mathbf{r})$  で表される場合には、

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}\mathbf{A} &= \nabla \cdot (\phi\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\phi B_x \mathbf{i} + \phi B_y \mathbf{j} + \phi B_z \mathbf{k}) = \frac{\partial(\phi B_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi B_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi B_z)}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial\phi}{\partial x}B_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}B_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}B_z + \phi\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \\
 &= \nabla\phi \cdot \mathbf{B} + \phi\nabla \cdot \mathbf{B} \\
 &= \operatorname{grad}\phi \cdot \mathbf{B} + \phi\operatorname{div}\mathbf{B}
 \end{aligned}$$

を得る。

### (3) 回転 (curl)

ベクトル  $\mathbf{A}$  が  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + A_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + A_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$  であるとき、

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})$$

をベクトル  $\mathbf{A}$  の回転という。ベクトルの外積の定義より、

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_z & A_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
 &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

となる。

角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$  で回転する質点の速度は

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k}$$

で与えられる。これの回転を考えると、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} = & \left\{ \frac{\partial(\omega_x y - \omega_y x)}{\partial y} - \frac{\partial(\omega_z x - \omega_x z)}{\partial z} \right\} \mathbf{i} \\ & + \left\{ \frac{\partial(\omega_y z - \omega_z y)}{\partial z} - \frac{\partial(\omega_x y - \omega_y x)}{\partial x} \right\} \mathbf{j} \\ & + \left\{ \frac{\partial(\omega_z x - \omega_x z)}{\partial x} - \frac{\partial(\omega_y z - \omega_z y)}{\partial y} \right\} \mathbf{k}\end{aligned}$$

となる。角速度が一定のとき、角速度ベクトルの成分も一定でなければならぬから、

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega_x \mathbf{i} + 2\omega_y \mathbf{j} + 2\omega_z \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}$$

となり、角速度ベクトルの2倍に等しい。あるいは、 $\boldsymbol{\omega} = \frac{\nabla \times \mathbf{v}}{2}$ として角速度を表すことができる。

一定速度で回転している質量  $m$  の質点の角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(yv_z - zv_y)\mathbf{i} + m(zv_x - xv_z)\mathbf{j} + m(xv_y - yv_x)\mathbf{k}$$

で与えられる。 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k}$  とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} &= m(yv_z - zv_y)\mathbf{i} + m(zv_x - xv_z)\mathbf{j} + m(xv_y - yv_x)\mathbf{k} \\ &= m(y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z))\mathbf{i} + m(z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x))\mathbf{j} \\ &\quad + m(x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y))\mathbf{k} \\ &= m\{\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx\}\mathbf{i} + m\{-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z yz\}\mathbf{j} \\ &\quad + m\{-\omega_x zx - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)\}\mathbf{k}\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{L} &= m \left\{ \frac{\partial\{-\omega_x zx - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)\}}{\partial y} - \frac{\partial\{-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z yz\}}{\partial z} \right\} \mathbf{i} \\ &\quad + m \left\{ \frac{\partial\{\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx\}}{\partial z} - \frac{\partial\{-\omega_x zx - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)\}}{\partial x} \right\} \mathbf{j} \\ &\quad + m \left\{ \frac{\partial\{-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z yz\}}{\partial x} - \frac{\partial\{\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx\}}{\partial y} \right\} \mathbf{k} \\ &= m(-\omega_y z + 2\omega_z y - 2\omega_y z + \omega_z y)\mathbf{i} + m(2\omega_x z - \omega_z x + \omega_x z - 2\omega_z x)\mathbf{j} \\ &\quad + m(-\omega_x y + 2\omega_y x - 2\omega_x y + \omega_y x)\mathbf{k} \\ &= 3m(\omega_z y - \omega_y z)\mathbf{i} + 3m(\omega_x z - \omega_z x)\mathbf{j} + 3m(\omega_y x - \omega_x y)\mathbf{k} = 3m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= 3m\mathbf{v}\end{aligned}$$

となり、角運動量の回転は運動量の3倍に等しい。

$$\mathbf{A} = \nabla\phi \text{ のとき、 } \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \text{ で、他の成分も } 0 \text{ なので、}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

である。また

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

となる。これも

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} = 0 \end{aligned}$$

で容易に証明される。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \phi A_x \mathbf{i} + \phi A_y \mathbf{j} + \phi A_z \mathbf{k} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{\partial(\phi A_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi A_y)}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y + \phi \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{\partial(\phi A_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\phi A_z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z + \phi \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{\partial(\phi A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi A_x)}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x + \phi \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

であるので、

$$\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A} = \text{grad } \phi \times \mathbf{A} + \phi \text{rot } \mathbf{A}$$

を得る。

## 4. 積分

## (1) 積分の簡単な復習

2次元平面の直交  $xy$  座標系において、 $y = f(x)$  で表される、連続で滑らかな曲線があるものとする。このとき、 $x$  軸上の区間  $[a, b]$  を  $n$  個に分割して、 $x_k \sim x_k + \Delta x_k$  の微小区間  $\Delta x_k$  を作り、

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

を計算する。これは  $x$  軸上に沿って  $x_1 = a$  から  $x_n = b - \Delta x_n$  まで、高さ  $f(x_k)$ 、幅  $\Delta x_k$  の短冊の面積を足し合わせたものである。分割数を無限に大きくし、短冊の幅を無限小にすると、 $x$  軸上に沿った線積分として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

で表される定積分を得る。このようにして定義された積分には

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) \frac{dx}{dt} dt$$

$$\int_a^c f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^c - \int_a^c f(x) g'(x) dx$$

等の性質がある。

## (2) 線積分

## (2-1) 曲線の長さ

$xy$  平面において、点  $A(x_A, y_A)$  から点  $B(x_B, y_B)$  まで繋がっている滑らかな曲線  $C$  があるものとする。軌跡に沿って  $(x, y)$  で表されるベクトル  $\mathbf{r}$  から  $(x+dx, y+dy)$  で表されるベクトル  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  に質点に変位するとき、ベクトルの変化は

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

となる。このとき、質点の軌跡に沿って微小線分  $ds$  を取ると、 $d\mathbf{r}$  は  $ds$  に平行なベクトルであって同じ長さである。よって、 $|d\mathbf{r}| = ds$  より、曲線  $C$  の全長さ  $s$  は、以下の線積分

$$s = \int_C |d\mathbf{r}| = \int_C ds$$

で与えられる。さらには

$$|d\mathbf{r}| = ds = \sqrt{\{(x+dx) - x\}^2 + \{(y+dy) - y\}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

であるので、

$$s = \int_C |d\mathbf{r}| = \int_C ds = \int_C \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_C \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

となる。ただし、 $ds > 0$  であるので、 $dx > 0$ 、 $dy > 0$  となる積分経路をとらなければならない。あるいは、

$$s = \int_C ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} |dx| = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} |dy|$$

のように、積分経路において微小増分を  $|dx| > 0$ 、 $|dy| > 0$  とする。

あるいは、媒介変数  $t$  を用いて、 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$  で与えられるとき、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる。この場合にも媒介変数は積分経路に沿って  $dt > 0$  とする。全長さは

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

の線積分で与えられる。

3次元における曲線についても、2次元の結果を延長して考えればよい。今、点



$(x_A, y_A, z_A)$  から点  $(x_B, y_B, z_B)$  までを結ぶ連続な曲線  $C$  上の点  $(x, y, z)$  について、 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ 、 $z = z(t)$  であたえられるとき、曲線上の微小線分  $ds$  の大きさは

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

となる。よって、 $(x_A, y_A, z_A) = (x(t_A), y(t_A), z(t_A))$ 、 $(x_B, y_B, z_B) = (x(t_B), y(t_B), z(t_B))$  とするとき、曲線の全長は

$$s = \int_C ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられる。あるいは、 $y = y(x)$ 、 $z = z(x)$  として与えられている場合には、

$$s = \int_C ds = \int_C \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} |dx|$$

のように表すこともできる。

例 1) 半径  $a$  の円周  $C$ :  $x^2 + y^2 = a^2$

線素の長さは

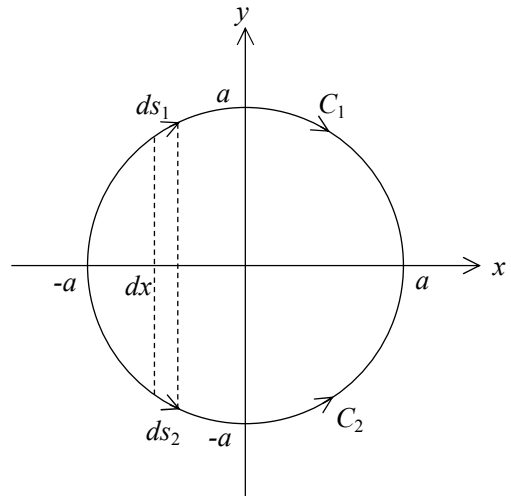
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

である。ここで、 $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$  なので、同じ  $x$  に対して正負の二つの  $y$  の値がある。そこで、 $y$  が正の場合を  $y = \varphi_1$ 、負の場合を  $y = \varphi_2$  とし、またそれぞれに対応する線素の長さを  $ds_1$ 、 $ds_2$  とする。ここで、

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}、\quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

より、

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2} dx = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}、\quad ds_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)^2} dx = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



である。  $ds_1 = ds_2$  とできるので、

$$\begin{aligned} s &= \int_C ds = \int_{C_1} ds_1 + \int_{C_2} ds_2 = 2 \int_{C_1} ds_1 = 2 \int_{-a}^a \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2 \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = 2\pi a \end{aligned}$$

を得る。

【別解1】 C上の点は、 $x = a \cos \theta$ 、 $y = a \sin \theta$ 、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$  で表すことができるので、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} d\theta = ad\theta \end{aligned}$$

よって、

$$s = \int_C ds = 2 \int_0^{2\pi} ad\theta = 2\pi a$$

である。

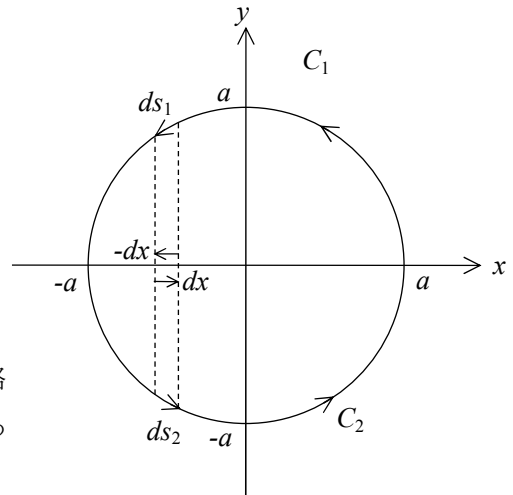
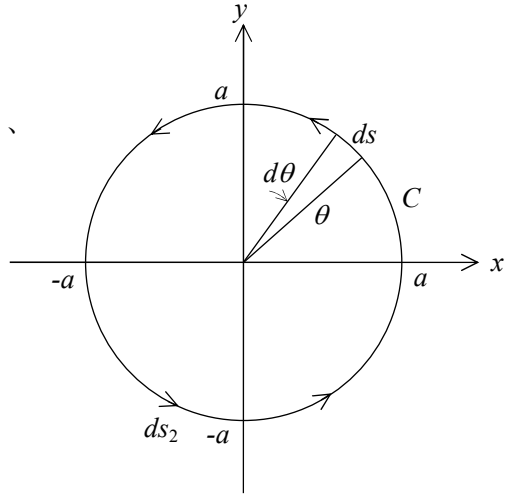
【別解2】  $d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy = 0$  より、 $dy/dx = -x/y$  であることに注意して、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} |dx| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} |dx| \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} |dx| \end{aligned}$$

となる。x軸の点(a,0)から反時計回りに積分経路をとると、 $y \geq 0$ の領域の  $C_1$  で  $|dx| = -dx > 0$  であり、

$$\begin{aligned} \int_C ds &= \int_{C_1} ds_1 + \int_{C_2} ds_2 = \int_a^{-a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} (-dx) + \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2\pi a \end{aligned}$$

となる。



例2) 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (ただし  $a \geq b$ ) の周  $C$  の長さ

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ なので、 } \frac{dy}{dx} = \mp \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

である。同じ  $x$  の値に対して、 $y$  は正と負の二つの値をとるので、

$$\begin{aligned} ds &= 2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{2}{a} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} s &= \int_C ds = \frac{2}{a} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)a^2 \sin^2 t}}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} a \cos t dt \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

とできる。ここで、 $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  であり、 $a \geq b > 0$  より、 $0 \leq k < 1$  である。また、最後の式において、被積分関数が偶関数であるので、

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

となる。

ここで、

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \text{ ただし } |k| < 1$$

と置くことにする (これを第2種楕円積分といい、解析的には値が与えられない) と、

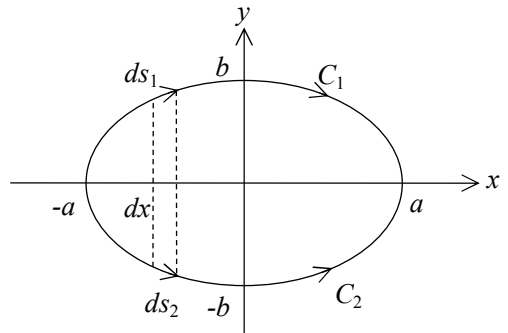
$$s = 4aE(\pi/2, k) = 4aE(k)$$

で周の長さが与えられる。ここで

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

は第2種完全楕円積分と呼ばれる。

※ ちなみに、



$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} dt, \text{ ただし } |k| < 1$$

は第1種楕円積分と呼ばれ、

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} dt$$

は第1種の完全楕円積分と呼ばれる。

【別解】  $x = a \sin t$ 、 $y = b \cos t$ 、 $0 \leq t \leq 2\pi$

とおくと、楕円の方程式を満たしている。

よって、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  より、

$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = a \cos t dt \mathbf{i} - b \sin t dt \mathbf{j}$  なので、

$$\begin{aligned} ds = |d\mathbf{r}| &= \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt \\ &= b \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

より、

$$s = \int_C ds = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 4aE(k)$$

を得る。

## (2-2) 線積分

質点に  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$  の力が作用して点  $(x, y, z)$  から点  $(x+dx, y+dy, z+dz)$  まで移動した際に、力  $\mathbf{F}$  によって質点になされた仕事は、

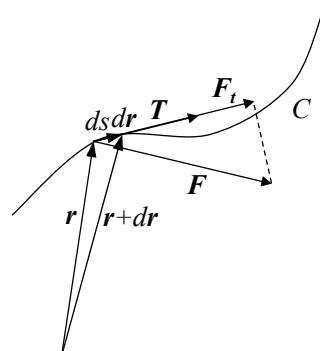
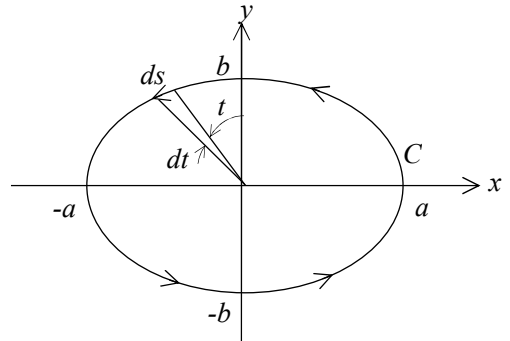
$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ただし  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$

で与えられる。また、経路にそった微小要素  $ds$  をとると、単位接線ベクトルは

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

であったから、



$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = F_t ds$$

のようにも書ける。ただし、 $F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  は接線方向の力の成分である。従って、線状の経路  $C$  にそって質点が動いた際になされた仕事の総和は

$$W = \int_C dW = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_t ds$$

で与えられる。このように線状の経路にそった積分のことを線積分という。

まず二次元の場合を考える。有限の長さの線状の経路  $C$  に対して関数  $F(x, y)$  が与えられている場合に、経路  $C$  を  $n$  個の要素  $\Delta s_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) に分割して、 $(\xi_i, \eta_i)$  を  $\Delta s_i$  内の任意の点とすると、 $\Delta x_i$ 、 $\Delta y_i$  をそれぞれ  $\Delta s_i$  の  $x$ 、 $y$  軸に射影した区間として、

$$F(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad F(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \quad F(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

といった量を考えることができる。ここで、 $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i-1} + \Delta x_i$ 、 $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_{i-1} + \Delta y_i$  である。これらを経路に沿って足し合わせた総和はそれぞれ、

$$\sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

である。分割数  $n$  を無限に大きくすると、 $\Delta s_i \rightarrow 0$ 、 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 、 $\Delta y_i \rightarrow 0$  であって、また、 $\xi_i \rightarrow x_i$ 、 $\eta_i \rightarrow y_i$  となる。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i = \int_C F(x, y) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i = \int_C F(x, y) dy$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \int_C F(x, y) ds$$

として線積分が定義される。

曲線  $C$  に沿って、ベクトル関数  $\mathbf{F}$  に対し、

$$\int_C \mathbf{F} ds, \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$$

などの線積分を実行することができる。 $\mathbf{F}$  を単位長さあたりの分布力とすれば、一番目は経路に沿った合力を表す。 $\mathbf{F}$  を力とすると、 $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は  $d\mathbf{r}$  に沿った微小仕事であり、二番目は経路に沿った仕事の和を表すことになる。また、質点が力  $\mathbf{F}$  を受けて  $d\mathbf{r}$  だけ変位したとき、 $d\mathbf{M} = -\mathbf{F} \times d\mathbf{r}$  は力  $\mathbf{F}$  によるモーメントの増分である。よって、三番目は経路に沿ったモーメントの和を表すことができる。

積分経路が閉じた曲線  $C$  の場合には

$$\oint_C \mathbf{F} ds, \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \oint_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$$

のように $\circ$ をつけた積分記号を用いることが多い。

例題  $\int_C \frac{1}{x^2 + y} dx$

経路  $C_1$  点(1,1)から点(2,4)まで  $y = x^2$  に沿う経路

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{1}{x^2 + y} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x^2 + x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

経路  $C_2$  点(1,1)から点(1,4)まで  $y$  軸に平行な経路  
点(1,4)から点(2,4)まで  $x$  軸に平行な経路

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{1}{x^2 + y} dx &= \int_1^1 \frac{1}{1 + y} dy + \int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= 0 + \frac{1}{4} \int_{1/2}^2 \frac{1}{(x/2)^2 + 1} 2d(x/2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} [\tan^{-1} t]_{1/2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

経路  $C_3$  点(1,1)から点(2,1)まで  $x$  軸に平行な経路  
点(2,1)から点(2,4)まで  $y$  軸に平行な経路

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \frac{1}{x^2 + y} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_2^2 \frac{1}{4 + y} dy = [\tan^{-1} x]_1^2 + 0 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 \\ &= \tan^{-1} 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

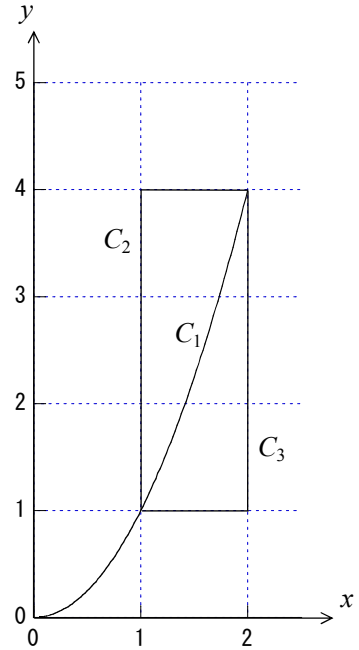
※  $y = \tan x$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = (\sin x)' \frac{1}{\cos x} + \sin x \left( \frac{1}{\cos x} \right)' = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$y = \tan^{-1} x$  とすると、 $x = \tan y$  より、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \text{ なので、} \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

※  $x = g(t)$  とするとき、



$$\int_{x_A}^{x_B} f(x) dx = \int_{t_A}^{t_B} f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

例題) 中心力  $\mathbf{F} = -kr$  を受ける質点が  $y = x^2 + 1$  の軌跡において、(0,1) から (1,5) まで移動する間に、(1) 中心力によってなされる仕事、(2) 摩擦力 (摩擦係数  $m$ ) によってなされる仕事を求める。

(1) 中心力  $\mathbf{F} = -kr$  に抗して接線方向になされた仕事は、 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ 、 $d(r^2) = d(x^2 + y^2)$ 、 $d(r^2) = 2rdr$  であることに注意して、

$$\begin{aligned} dW_t &= -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = kr \cdot d\mathbf{r} = k(xdx + ydy) \\ &= \frac{k}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{k}{2} d(r^2) = krdr \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} W_t &= \int_C dW_t = k \int_{\sqrt{0^2+1^2}}^{\sqrt{1^2+2^2}} r dr \\ &= k \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{5}} = 2k \end{aligned}$$

となる。

【別解】 単位接線ベクトルは

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

である。これより、接線方向の力は、 $\mathbf{F}_t = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} = -F_t\mathbf{T}$  であるので

$$\mathbf{F}_t = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = k(xi + yj) \cdot \left( \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \right) = k \frac{xdx + ydy}{ds} = \frac{k}{2} \frac{d(r^2)}{ds}$$

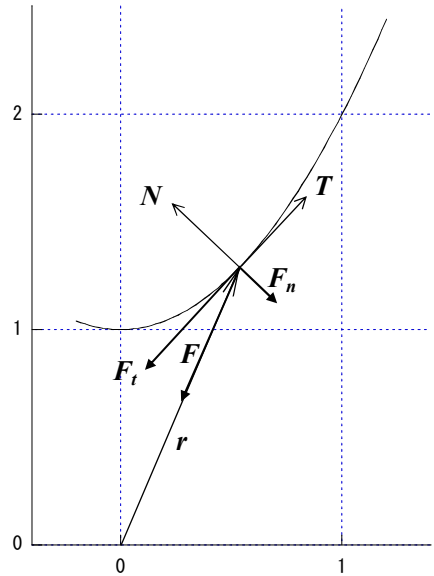
となる。よって、これに抗してなされる仕事は、

$$W_t = \int_C \mathbf{F}_t ds = \int_C \frac{k}{2} d(r^2) = \left[ \frac{kr^2}{2} \right]_{0+1^2}^{1^2+2^2} = 2k$$

となる。

以上のように、力  $F$  によって接線方向になされた仕事  $W_t$  は経路によらない。ここで、

$$\phi(r) = \frac{kr^2}{2} \text{ とおくと、}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla\phi = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kr^2}{2} \right) - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kr^2}{2} \right) = -\mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{kr^2}{2} \right) - \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{kr^2}{2} \right) \\ &= -\mathbf{i} \frac{x}{r} kr - \mathbf{j} \frac{y}{r} kr = -k(xi + yj) = -kr \end{aligned}$$

である。よって、 $F_t = -|\mathbf{F}|$  より、 $dr = ds$  であることから、 $F_t = \frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{ds}$  なので、

$$W_t = \int_C F_t ds = \int_C d\phi = [\phi(r)]_{\phi(\sqrt{0+1^2})}^{\phi(\sqrt{1^2+2^2})} = \frac{5k}{2} - \frac{k}{2} = 2k$$

となる。

(2) 次に、摩擦力に抗してなされる仕事  $W_f$  を考える。単位法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{k} \times \mathbf{T} = \mathbf{k} \times \left( \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{dy}{ds} & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{dx}{ds} & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -\frac{dy}{ds} \mathbf{i} + \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。よって、経路に押す力は、 $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = -F_n\mathbf{N}$  なので、

$$\mathbf{F}_n = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = kr \cdot \mathbf{N} = k(xi + yj) \cdot \left( -\frac{dy}{ds} \mathbf{i} + \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \right) = k \left( -x \frac{dy}{ds} + y \frac{dx}{ds} \right)$$

となる。そして、これによる摩擦の仕事は

$$dW_f = \mu F_n ds = \mu k \left( -x \frac{dy}{ds} + y \frac{dx}{ds} \right) ds = \mu k (-x dy + y dx)$$

となる。これを積分するには、 $y = x^2 + 1$  より  $dy = 2x dx$  を用いて、

$$\begin{aligned} W_f &= \int_C dW_f = \mu k \int_0^1 -2x^2 dx + (x^2 + 1) dx = \mu k \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= \mu k \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{2\mu k}{3} \end{aligned}$$

を得る。ここで、摩擦力  $F_f$  は経路によって変化するため、仕事  $W_f$  は積分経路に依存することになることに注意しなければならない。

例題) 曲線  $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$  で、 $\int_C (xy + z^2) ds$  の線積分



$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-\sin t dt)^2 + (\cos t dt)^2 + (dt)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2} dt \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \int_C (xy + z^2) ds &= \int_0^\pi (\cos t \sin t + t^2) \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt + \sqrt{2} \int_0^\pi t^2 dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{-\cos 2t}{2} \right]_0^\pi + \sqrt{2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^\pi = 0 + \frac{\sqrt{2}\pi^3}{3} = \frac{\sqrt{2}\pi^3}{3} \end{aligned}$$

定理

領域  $D$  において、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r})$  となるような関数  $\phi$  があるとき、 $D$  内の曲線  $C$  に沿っての線積分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は  $C$  の端点  $A$ 、 $B$  によって決定し、積分経路には無関係である。

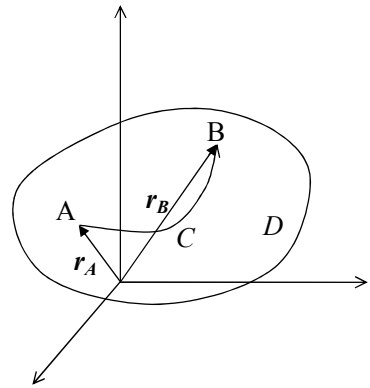
また、このとき、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A$$

となる。ここで  $\phi_A$  と  $\phi_B$  はそれぞれ  $A$ 、 $B$  での  $\phi$  の値である。

証明：－

$C$  上での任意の点は  $\mathbf{r}(t)$ 、 $t_A \leq t \leq t_B$  で表され、 $A$  点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}(t_A)$ 、 $B$  点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}(t_B)$  とする。また、 $A$  点と  $B$  点での  $\phi$  の値をそれぞれ  $\phi_A = \phi(\mathbf{r}_A) = \phi(\mathbf{r}(t_A))$ 、 $\phi_B = \phi(\mathbf{r}_B) = \phi(\mathbf{r}(t_B))$  とする。



$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{k} \right) \right\} dt \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} dt \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

なので、結局

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\phi}{dt} dt = d\phi$$

を得る。これより、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{\phi_A}^{\phi_B} d\phi = \phi_B - \phi_A$$

となり、線積分は始点 A と終点 B の  $\phi$  の値によって決まり、途中の積分経路にはよらないことがわかる。

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$  となる  $\phi$  のことを、 $\mathbf{F}$  のポテンシャル関数あるいは単にポテンシャルという（スカラーポテンシャルとも言う）。

さて、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  のように、成分が三つの関数  $f, g, h$  で表すことができるものとする。ここで、 $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$  であり、

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f dx + g dy + h dz$  であるから、 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi$  であるためには、

$$f = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

でなければならない。このことより、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

あるいは、

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が満たされなければならない。逆にこれらの式が満たされると  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi$  を満足する（証明は省略する）。よって、これらの式は  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$  であるための必要十分条件である。また、この条件は

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

であることと同じである。よって、

定理  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が 3 次元の区間で連続で 1 回微分可能な関数であり、かつ、 $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ならば、ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  が存在して、

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

となる。

例題) 中心力  $\mathbf{F} = -cr^n \mathbf{e}_r$  (ただし  $c$  は定数、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  は径方向の単位ベクトル) を受ける質点が A 点  $(x_A, y_A, z_A)$  から B 点  $(x_B, y_B, z_B)$  まで移動する際になされる仕事を求める。

- (1)  $\mathbf{F}$  の回転を計算せよ。
- (2) 仕事を求めよ。

(1)  $\mathbf{F}$  の回転を計算すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times (-cr^n \mathbf{e}_r) = -c \nabla \times (r^{n-1} x \mathbf{i} + r^{n-1} y \mathbf{j} + r^{n-1} z \mathbf{k}) \\ &= -c \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (zr^{n-1}) - \frac{\partial}{\partial z} (yr^{n-1}) \right\} \mathbf{i} - c \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (xr^{n-1}) - \frac{\partial}{\partial x} (zr^{n-1}) \right\} \mathbf{j} \\ &\quad - c \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (yr^{n-1}) - \frac{\partial}{\partial y} (xr^{n-1}) \right\} \mathbf{k} \\ &= -c \left\{ z \frac{\partial}{\partial y} (r^{n-1}) - y \frac{\partial}{\partial z} (r^{n-1}) \right\} \mathbf{i} - c \left\{ x \frac{\partial}{\partial z} (r^{n-1}) - z \frac{\partial}{\partial x} (r^{n-1}) \right\} \mathbf{j} \\ &\quad - c \left\{ y \frac{\partial}{\partial x} (r^{n-1}) - x \frac{\partial}{\partial y} (r^{n-1}) \right\} \mathbf{k} \\ &= -c \frac{\partial (r^{n-1})}{\partial r} \left\{ \left( z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \\ &= -c(n-1)r^{n-2} \left\{ \frac{zy - yz}{r} \mathbf{i} + \frac{xz - zx}{r} \mathbf{j} + \frac{yx - xy}{r} \mathbf{k} \right\} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。

(2) 上の計算より、 $\mathbf{F} = \nabla \phi$  となるポテンシャル関数があることがわかる。そこで

$$\phi = -\frac{cr^{n+1}}{n+1}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{cr^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{c}{n+1} \left( \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r^{n+1}) \\ &= -\frac{c}{n+1} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} (n+1)r^n = -cr^n \mathbf{e}_r = \mathbf{F} \end{aligned}$$

とできる。ここで力  $\mathbf{F}$  の向きと  $d\mathbf{r}$  の向きが逆なので、仕事の増分は  $dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  であ

る。これより、 $r_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$ 、 $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$  として、

$$\begin{aligned} W &= -\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -[\phi(r)]_{\phi(r_A)}^{\phi(r_B)} = -\phi(r_B) + \phi(r_A) = \frac{c}{n+1}(r_B^{n+1} - r_A^{n+1}) \\ &= \frac{c}{n+1} \left\{ (x_B^2 + y_B^2 + z_B^2)^{\frac{n+1}{2}} - (x_A^2 + y_A^2 + z_A^2)^{\frac{n+1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

を得る。

$$\text{【別解】 } W = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C cr^n \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_C cr^{n-1} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_C cr^{n-1}(xdx + ydy + zdz)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{n+1}) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n+1}) = \frac{x}{r}(n+1)r^n = (n+1)xr^{n-1} \text{ であることから、 } xr^{n-1} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x}(r^{n+1})$$

であり、同様にして、 $yr^{n-1} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y}(r^{n+1})$ 、 $zr^{n-1} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z}(r^{n+1})$  を得る。これより

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} cr^{n-1}(xdx + ydy + zdz) \\ &= \frac{c}{n+1} \int_{r_A}^{r_B} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(r^{n+1})dx + \frac{\partial}{\partial y}(r^{n+1})dy + \frac{\partial}{\partial z}(r^{n+1})dz \right\} \\ &= \frac{c}{n+1} \int_{r_A}^{r_B} d(r^{n+1}) = \frac{c}{n+1}(r_B^{n+1} - r_A^{n+1}) \end{aligned}$$

となり、仕事は経路によらないことがわかる。

$n = -2$  のとき、 $\mathbf{F} = -c \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = -c \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  は重力、点電荷による静電力を表す。ポテンシャルエネルギーを  $V$  とすると、 $\mathbf{F} = -\nabla V$  であって、今の場合、

$$V = -\frac{c}{r}$$

である。一方、 $r$  の距離から無限に離す際になされる仕事は、

$$W = -\int_r^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{c}{r} = -V$$

となり、ポテンシャルエネルギーに負の符号をつけたものとなる。

### (3) 面積分と体積積分

## (3-1) 面の面積

曲面の微小要素 ABCD の点を

$$A: (x, y, z)$$

$$B: (x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1)$$

$$C: (x + \Delta x_2, y + \Delta y_2, z + \Delta z_2)$$

$$D: (x + \Delta x_1 + \Delta x_2, y + \Delta y_1 + \Delta y_2, z + \Delta z_1 + \Delta z_2)$$

とすると、辺 AB と AD をベクトルで表したとき、

$$\overrightarrow{AB} = \Delta x_1 \mathbf{i} + \Delta y_1 \mathbf{j} + \Delta z_1 \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = \Delta x_2 \mathbf{i} + \Delta y_2 \mathbf{j} + \Delta z_2 \mathbf{k}$$

となる。よって、平面 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}' &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \end{vmatrix} \\ &= (\Delta y_1 \Delta z_2 - \Delta y_2 \Delta z_1) \mathbf{i} + (\Delta z_1 \Delta x_2 - \Delta z_2 \Delta x_1) \mathbf{j} + (\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

の絶対値

$$|\Delta \mathbf{S}'| = \sqrt{(\Delta y_1 \Delta z_2 - \Delta y_2 \Delta z_1)^2 + (\Delta z_1 \Delta x_2 - \Delta z_2 \Delta x_1)^2 + (\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1)^2}$$

で表される。点 A に点 B、点 D (よって点 C も) を無限に近づけたとき、平面 ABCD の面積は曲面要素 ABCD の面積にちかづいていき、

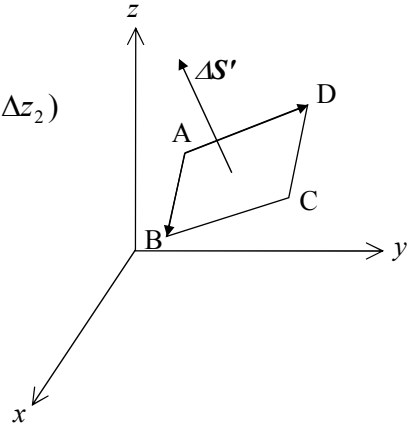
$$\begin{aligned} dS &= \lim_{B, C \rightarrow A} |\Delta \mathbf{S}'| \\ &= \sqrt{(dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1)^2 + (dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1)^2 + (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1)^2} \end{aligned}$$

となる。

このとき、点 A の単位法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \lim_{B, C \rightarrow A} \frac{\Delta \mathbf{S}'}{|\Delta \mathbf{S}'|} = \frac{d\mathbf{S}}{dS} \\ &= \frac{(dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) \mathbf{i} + (dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1) \mathbf{j} + (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1) \mathbf{k}}{\sqrt{(dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1)^2 + (dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1)^2 + (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1)^2}} \end{aligned}$$

で表すことができる。



例 1)  $xy$  平面に平行な平面:  $dz_1 = dz_2 = 0$  として、

$$dS = dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1$$

となり、面積要素において AB、AD をそれぞれ  $x$ 、 $y$  軸に平行にとると、 $dx_1 = dx$ 、 $dx_2 = 0$ 、 $dy_1 = 0$ 、 $dy_2 = dy$  として、

$$dS = dx dy$$

となる。

例 2) 点  $(x_o, y_o, z_o)$  を中心とし、 $z$  軸に垂直であつて  $x = \pm a$ 、 $y = \pm b$  を切片にもつ楕円の円の面積。

楕円の周  $C$  の方程式は、 $\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$ 、 $z = z_o$  である。これより、

$$x = x_o \pm a \sqrt{1 - \frac{(y-y_o)^2}{b^2}} = x_o \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-y_o)^2}$$

となる。まず  $x$  軸に沿つて高さ  $dy$  の短冊の面積  $dS_y$  を考える。この短冊の幅は

$$L(y) = \int_{x_o - a/b\sqrt{b^2 - (y-y_o)^2}}^{x_o + a/b\sqrt{b^2 - (y-y_o)^2}} dx = 2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-y_o)^2}$$

で与えられるので

$$dS_y = L(y) dy = 2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-y_o)^2} dy$$

となる。楕円の面積は、この短冊の面積を足し合わせればよいので、

$$S = \int_S dS_y = \int_{-b+y_o}^{b+y_o} L(y) dy = \frac{2a}{b} \int_{-b+y_o}^{b+y_o} \sqrt{b^2 - (y-y_o)^2} dy$$

を計算して得られる。

最後の項の積分を行うために、 $y - y_o = b \sin \theta$  とおくと  $dy = b \cos \theta d\theta$  であり、積分の下限值、上限値はそれぞれ  $\theta_1 = \sin^{-1}(-1) = -\pi/2$ 、 $\theta_2 = \sin^{-1}(1) = \pi/2$  となるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a}{b} \int_{-b+y_o}^{b+y_o} \sqrt{b^2 - (y-y_o)^2} dy = \frac{2a}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \theta} b \cos \theta d\theta \\ &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = 2ab \left[ \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2ab \left[ \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 2ab \left[ \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] + 2ab \left[ \frac{\sin \pi}{4} - \frac{\sin(-\pi)}{4} \right] \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

を得る。

【別解】  $\frac{x-x_o}{a} = \xi = r \cos \theta$ 、 $\frac{y-y_o}{b} = \eta = r \sin \theta$  とおくと、楕円の周 C の式に代入すれば、

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = \xi^2 + \eta^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 = 1$$

より、周 C は  $r=1$  のときに相当する。すなわち、楕円の内部は  $0 \leq r \leq 1$ 、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の円で表すことができる。ここで、

$$d\xi = d\left(\frac{x-x_o}{a}\right) = \frac{dx}{a}、d\eta = d\left(\frac{y-y_o}{b}\right) = \frac{dy}{b}$$

より円の微小要素の面積は

$$dS' = d\xi d\eta = \frac{dx dy}{ab}、\text{また } dS' = r dr d\theta$$

であるので、楕円の微小要素の微小要素の面積は

$$dS = dx dy = ab dS' = ab r dr d\theta$$

と書き直すことができる。従って、楕円の面積は

$$S = \int_S dS = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi ab$$

となる。

例 4) 底面、上面が  $x^2 + y^2 \leq a^2$ 、高さ  $h$  の円柱の側面の面積  
楕円の周 C の線要素  $ds$  は、 $x = a \cos \theta$ 、 $y = a \sin \theta$  とおくと、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(-a \sin \theta)^2 d\theta^2 + (a \cos \theta)^2 d\theta^2} = a d\theta$$

なので、周の長さは

$$s = \int_s ds = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a$$

となる。従って、側面の面積は

$$S = \int_0^h s dz = sh = 2\pi ah$$

である。

【別解】 側面に沿って微小要素 ABCD を  $dx_1 = dx$ 、 $dx_2 = 0$ 、 $dy_1 = dy$ 、 $dy_2 = 0$ 、 $dz_1 = 0$ 、 $dz_2 = dz$  となるようにとると、その面積は

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{(dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1)^2 + (dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1)^2 + (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1)^2} \\
 &= \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} dz = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx dz
 \end{aligned}$$

で表される。ここで、 $y$  の値は、 $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$  より同じ  $x$  の値に対して、正と負の場合がある。そこで正の値の場合を  $y = \varphi_1$ 、負の場合を  $y = \varphi_2$  とすると、

$$y \text{ が正の場合、 } \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y \text{ が負の場合、 } \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

である。従って、微小要素も

$$y \text{ が正の場合、 } dS_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2} dx dz = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz$$

$$y \text{ が負の場合、 } dS_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)^2} dx dz = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz$$

に分けられる。これより、全面積は

$$S = \int_{S_1} dS_1 + \int_{S_2} dS_2 = 2 \int_0^h \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz = 2ah \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

となる。ここで、最後の式の積分を計算するために、 $x = a \sin t$  とおくと、積分の下限値、上限値はそれぞれ  $-\pi/2$ 、 $\pi/2$  であり、 $dx = a \cos t dt$  より、

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cos t dt}{a \cos t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$$

であるので、

$$S = 2\pi ah$$

となる。

例 5)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  の球の表面積

$z$  軸に垂直な周の軌跡を  $x^2 + y^2 = \rho^2$ 、 $x = \rho \cos \theta$ 、 $y = \rho \sin \theta$ 、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$  とすると、周上の線要素の長さは



$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{(-\rho \sin \theta d\theta)^2 + (\rho \cos \theta d\theta)^2} \\ &= \rho d\theta \end{aligned}$$

である。また、 $\rho = a \sin \phi$ 、 $0 \leq \phi \leq \pi$  であるので、 $ds = a \sin \phi d\theta$  である。

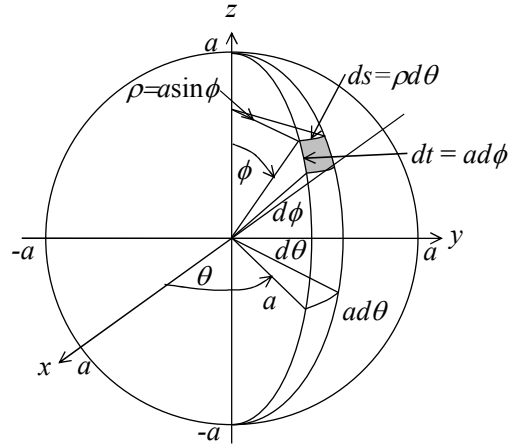
一方、 $ds$  に垂直な線素を  $dt$  とすると、その長さは  $dt = a d\phi$  であるので、

$$dS = ds dt = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

を得る。以上より、球面の面積は

$$S = \int_S dS = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi a^2 [-\cos \phi]_0^\pi = 4\pi a^2$$

となる。



### (3-2) 体積

もっともシンプルな体積の求め方は、微小体積要素  $dV = dx dy dz$  を足し合わせることである。

$$V = \int_V dV = \iiint_V dx dy dz$$

我々は、微小体積要素を定める際に、円筒座標や極座標、あるいは他の座標をもちいることができる。

例1)  $z$  軸を中心軸とする半径  $a$ 、高さ  $h$  の円柱の体積

$dV = dx dy dz$  のとき、

$$V = \int_0^h \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy dz = \int_0^h \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2-y^2} dy dz = \pi a^2 h$$

$dV = dS dz = r dr d\theta dz$  のとき、

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta dz = \pi a^2 h$$

例2) 半径  $a$  の球の体積

$dV = dx dy dz$  のとき

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{-\sqrt{a^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} dx dy dz = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} 2\sqrt{a^2-y^2-z^2} dy dz \\
 &= \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{a^2-y^2-z^2} dy dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\sqrt{a^2-z^2} \sin t}^{\sqrt{a^2-z^2} \sin t} \sqrt{a^2-z^2 - (a^2-z^2)\sin^2 t} \sqrt{a^2-z^2} \cos t dt dz \\
 &= (a^2-z^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} (a^2-z^2) \\
 \therefore V &= \pi \int_{-a}^a (a^2-z^2) dz = \pi \left( 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$

$dV = dS dr = r dr \sin \phi d\phi d\theta$  のとき、

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 dr \sin \phi d\phi d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}$$

### (3-3) 面積分と体積積分

$$\text{面積分} \quad \int_S F(x, y, z) dS$$

$$\text{線積分} \quad \int_V F(x, y, z) dV$$

曲面  $S$  上の微小要素  $dS$  において、スカラー関数  $f$  とベクトル関数  $\mathbf{F}$  に対し、

$$f dS, \mathbf{F} dS, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \mathbf{F} \times \mathbf{n} dS$$

などの微小量を考えることができる。ここで  $\mathbf{n}$  は微小要素の単位法線ベクトルである。

あるいは、面の法線を含めたベクトル  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  を用いて、

$$f dS, \mathbf{F} dS, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

と表すこともできる。これらの微量を着目する面について足し合わせたものが面積分であり、

$$\int_S f dS, \int_S \mathbf{F} dS, \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{n} dS$$

と書く。球の表面のように、面が閉じている場合には、積分記号を

$$\oint_S f dS, \oint_S \mathbf{F} dS, \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n} dS$$

と表記する場合が多い。

体積  $V$  中の微小要素  $dV$  において、スカラー関数  $f$  とベクトル関数  $\mathbf{F}$  に対し、

$$fdV、\mathbf{F}dV$$

の微小量を考えることができる。これらの微小量を体積全体にわたって足し合わせ、

$$\int_V fdV、\int_V \mathbf{F}dV$$

で表される体積分とできる。

教科書例題 4) 円筒座標による解き方は教科書

面積分

側面 (side、s) :

$$dS_1 = dS_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx dz = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz$$

より、 $x = a \sin t$ 、 $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$  とおいて、

$$\begin{aligned} \int_{S_s} x^2 z dS_s &= 2 \int_{S_1} x^2 z dS_1 = 2 \int_0^h \int_{-a}^a \frac{ax^2 z}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz \\ &= 2a \frac{h^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} a \cos t dt \\ &= a^3 h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = a^3 h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi a^3 h^2}{2} \end{aligned}$$

上面 (top、t) :  $dS = dx dy$

$$\begin{aligned} \int_{S_t} x^2 z dS_t &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} x^2 h dy dx = 2h \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 2h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= 2a^4 h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 2a^4 h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} dt \\ &= \frac{a^4 h}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi a^4 h}{4} \end{aligned}$$

底面 (bottom、b) :  $x^2 z = 0$  より面積分は 0、 $\int_{S_b} x^2 z dS_b = 0$

以上より、全面積分は以下となる。

$$\int_S x^2 z dS = \frac{\pi a^3 h^2}{2} + \frac{\pi a^4 h}{4}$$

体積分

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^h \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^2 z dx dy dz = \int_0^h z dz \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 dy dx \\
&= \frac{h^2}{2} \int_{-a}^a x^2 \left( \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_{-a}^a 2x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \\
&= h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\
&= a^4 h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = a^4 h^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} dt \\
&= \frac{a^4 h^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi a^4 h^2}{8}
\end{aligned}$$

2次元でのグリーンの定理（グリーンの補助定理）

xy平面において、閉曲線  $C$  とそれで囲まれる領域  $D$  において、 $P(x,y)$ 、 $Q(x,y)$  が連続で微分可能ならば、

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

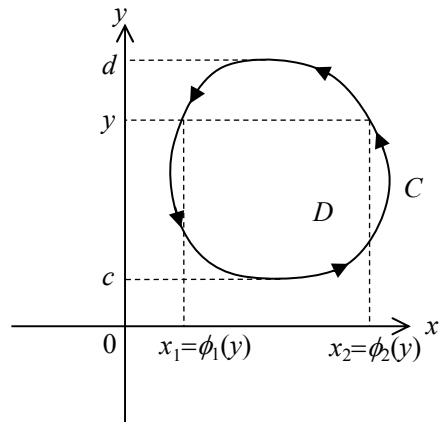
が成り立つ。

まず、左辺の面積分の第1項目を計算する。閉曲線の  $y$  のとる区域を  $[c, d]$  とし、 $c \leq y \leq d$  において  $y$  の値に対する  $x$  の最大値、最小値をそれぞれ  $x_2 = \phi_2(y)$ 、 $x_1 = \phi_1(y)$  とする。これより、

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\
&= \int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\
&= \int_c^d \{Q(\phi_2(y), y) - Q(\phi_1(y), y)\} dy \\
&= \int_c^d Q(\phi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\phi_1(y), y) dy \\
&= \int_c^d Q(\phi_2(y), y) dy + \int_d^c Q(\phi_1(y), y) dy
\end{aligned}$$

を得る。積分経路は閉回路  $C$  に沿って反時計回りに回っているので、

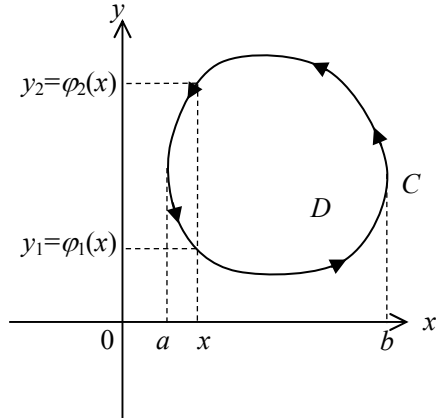
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q(x, y) dy$$



と書き直すことができる。

次に、グリーンの定理において左辺の積分の第2項について計算する。閉曲線の  $x$  のとる区域を  $[a, b]$  とし、 $a \leq x \leq b$  において  $x$  の値に対する  $y$  の最大値、最小値をそれぞれ  $y_2 = \varphi_2(x)$ 、 $y_1 = \varphi_1(x)$  とする。これより、

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right\} dx \\ &= \int_a^b \{P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))\} dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= - \left\{ \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx \right\} \end{aligned}$$



を得る。ここで積分経路をたどると、 $\{$  内は以下のように  $C$  を反時計回りに回っている。

$$\int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx = \oint_C P(x, y) dx$$

従って、

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_C P(x, y) dx$$

を得る。

例)  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$  を  $C$  とする。グリーンの補助定理より

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{y_0 - a}^{y_0 + a} \int_{x_0 - \sqrt{a^2 - y^2}}^{x_0 + \sqrt{a^2 - y^2}} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

となる。

$$(1) \quad \int_C (2x + y) dx + (x - 2y) dy$$

$x = x_0 + a \cos t$ 、 $y = y_0 + a \sin t$  とおくと、 $dx = -a \sin t dt$ 、 $dy = a \cos t dt$  より、

$$\begin{aligned}
& \int_C (2x+y)dx + (x-2y)dy \\
&= \int_0^{2\pi} (2x_o + 2a \cos t + y_o + a \sin t)(-a \sin t dt) + (x_o + a \cos t - 2y_o - 2a \sin t) \cos t dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \{-(2x_o + y_o) \sin t + (x_o - 2y_o) \cos t\} dt \\
&+ a^2 \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t - \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) dt \\
&= a(2x_o + y_o) [\cos t]_0^{2\pi} + a(x_o - 2y_o) [\sin t]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} (\cos 2t - 2 \sin 2t) dt \\
&= 0 + 0 + a^2 \left[ \frac{\sin 2t + 2 \cos 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

一方、グリーンの補助定理を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x+y) - \frac{\partial}{\partial x}(x-2y) = 1 - 1 = 0$$

より、積分は明らかに0となる。

(2)  $x_o = y_o = 0$  のとき、 $\int_C \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}$

$x = a \cos t$ 、 $y = a \sin t$  とおくと、 $dx = -a \cos t dt$ 、 $dy = a \sin t dt$  より、

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t \times (-a \sin t) dt}{a^2} + \frac{a \cos t \times (a \cos t) dt}{a^2} \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi
\end{aligned}$$

となる。

次に、グリーンの補助定理をもちいると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

であることから、積分は0となり、先の計算結果とはあわない。

さて、 $\frac{\partial}{\partial x}(\ln r) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r}(\ln r) = \frac{x}{r} \frac{1}{r} = \frac{x}{r^2}$ 、同様に  $\frac{\partial}{\partial y}(\ln r) = \frac{y}{r^2}$  であることに注

意すると、面積分における被積分関数は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\ln r) = \nabla^2 \ln r = 0 \end{aligned}$$

である。2次元において  $\ln r$  は調和関数であってラプラス方程式を満たす。

しかし、上の式における第1項と第2項は調和関数ではないので0とはならない。すなわち、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dS &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx dy \\ &= \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 - y^2 + y^2} dy - \int_{-a}^a \frac{-\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 - y^2 + y^2} dy \\ &= \frac{2}{a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dS &= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2 + a^2 - x^2} dx - \int_{-a}^a \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2 + a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2}{a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi \end{aligned}$$

であるので、これらの面積分を足し合わせたものは線積分の結果と一致する。

例) 閉曲線  $C$  に囲まれた領域  $D$  の面積を  $S$  とするとき、

$$S = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

証明:  $\mathbf{r} = xi + yj$ 、 $d\mathbf{r} = dxi + dyj$  として、

$$dS = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \frac{xdy - ydx}{2} \mathbf{k} = \frac{xdy - ydx}{2} \text{ より、 } S = \int_D dS = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$$

【別解】 グリーンの補助定理  $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy$  において、 $P = -y$ 、

$Q = x$  とおくと、 $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \{1 - (-1)\} dx dy = 2 \iint_D dS = 2S$  となる。よって、

$S = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$  を得る。

例) 教科書問題 599、18

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \left( \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n} ds$$

$$\text{あるいは、} \iint_S \nabla^2 F dx dy = \int_C \nabla F \cdot \mathbf{n} ds, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

証明：－

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx dy &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dy = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} P(\varphi_2(y), y) dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} P(\varphi_1(y), y) dy \\ &= \int_C P dy = \int_C \frac{\partial F}{\partial x} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx dy &= \iint_S \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy dx = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial y} dy dx \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} Q(x, \psi_2(y)) dx - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} Q(x, \psi_1(y)) dx \\ &= - \int_C Q dx = - \int_C \frac{\partial F}{\partial y} dx \end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial F}{\partial x} dy - \frac{\partial F}{\partial y} dx$$

である。右辺は

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial x} dy - \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_C \mathbf{k} \cdot \nabla F \times d\mathbf{r} = \int_C \nabla F \cdot d\mathbf{r} \times \mathbf{k}$$

と書き直すことができる。ここで、 $d\mathbf{r} \times \mathbf{k} = d\mathbf{st} \times \mathbf{k} = \mathbf{n} ds$  であるので、

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial x} dy - \frac{\partial F}{\partial y} dx = \int_C \nabla F \cdot \mathbf{n} ds$$

を得る。以上より、

$$\iint_S \nabla^2 F dx dy = \int_C \nabla F \cdot \mathbf{n} ds$$

となる。



## 3-3. ガウスの発散定理

準備：－

微小面積要素  $dS$  の法線を  $\mathbf{n}$  とすると、

$$\mathbf{n} = \cos \alpha_n \mathbf{i} + \cos \beta_n \mathbf{j} + \cos \gamma_n \mathbf{k}$$

と書くことができる。

ここで、 $(\cos \alpha_n, \cos \beta_n, \cos \gamma_n)$  の各成分はそれぞれ単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸のなす角度による方向余弦である。

$dS$  を  $yz$  平面へ射影して得られる面積  $dS_x$  は  $x$  軸に垂直なので、この微小要素の単位法線ベクトルは  $\mathbf{i}$  である。従って、

$$dS_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \cos \alpha_n dS$$

となる。同様にして、 $y$ 、 $z$  軸に垂直な射影面積を  $dS_y$ 、 $dS_z$  とすると、

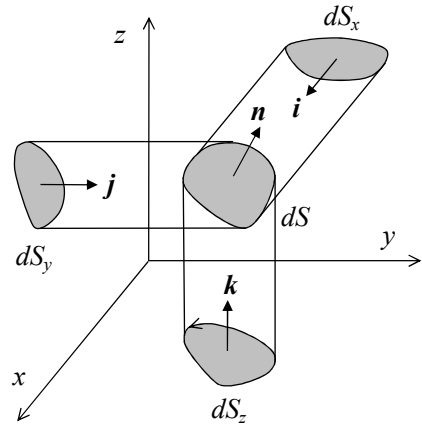
$$dS_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \cos \beta_n dS, \quad dS_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \cos \gamma_n dS$$

である。

ここで、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸に垂直な射影微小要素の面積を  $dydz$ 、 $dzdx$ 、 $dx dy$  でとっても良いので、

$$dydz = dS_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS, \quad dzdx = dS_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad dx dy = dS_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$$

とすることができる。



## ガウスの発散定理

3次元の区間において、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が閉曲面  $S$  とその内部  $V$  で連続かつ1回微分可能であり、閉曲面  $S$  上の任意の点において外側に向いている単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると、

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

となる。

証明：－

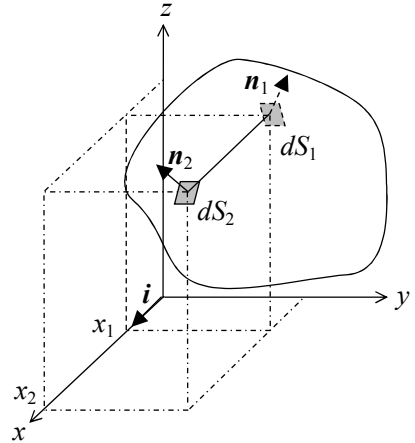
$$\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k} \text{ と置くと、 } \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \text{ なので、右辺は}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz$$

と表すことができる。さらに右辺第1項に着目すると、

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= \iint_S \left( \int_{f_1}^{f_2} df \right) dy dz \\ &= \iint_{S_2} f_2 dy dz - \iint_{S_1} f_1 dy dz \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f_2, f_1$ はそれぞれ同じ  $y, z$  に対する  $x$  の最大値  $x_2$ 、最小値  $x_1$  における  $f$  の値である。このとき、点  $(x_1, y, z)$  での表面  $S_1$  での微小面積を  $dS_1$  またその要素での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_1$  とし、点  $(x_2, y, z)$  での表面  $S_2$  での微小面積を  $dS_2$  またその要素での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_2$  とする。 $x$  の最大値の表面では  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 \geq 0$ 、最小値の表面では  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 \leq 0$  となる。



さらに、表面  $S_2$  では  $dy dz = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2$ 、表面  $S_1$  では  $dy dz = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1$  であるので、

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{S_2} f_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 + \int_{S_1} f_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 = \oint_S f \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

を得る。同様にして、

$$\iiint_V \frac{\partial g}{\partial y} dx dy dz = \oint_S g \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \iiint_V \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz = \oint_S h \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_V \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial g}{\partial y} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz \\ &= \oint_S f \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_S g \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_S h \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S (f \mathbf{i} + g \mathbf{j} + h \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

となる。

例)  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS = 3V$

$$\text{証明：} - \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS = \iint_S (xn_x + yn_y + zn_z) dS = \iint_S xn_x dS + \iint_S yn_y dS + \iint_S zn_z dS$$

ここで、 $\iint_S xn_x dS = \iiint_V x dy dz = \iiint_V dx dy dz = V$  であり、他の項も同様である。よって証明された。

【別解】 ガウスの発散定理に  $\mathbf{F} = \mathbf{r}$  を代入すると、以下のように証明される。

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \iiint_V 3 dV = 3V$$

例)  $r^m \mathbf{e}_r$  (ただし  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ) が連続かつ一回微分可能な領域において、

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot (r^m \mathbf{e}_r) dS = (m+2) \iiint_V r^{m-1} dV$$

であり、 $m = -2$  のとき上式は 0 となる。

【証明】 ガウスの発散定理より、 $\nabla r = \mathbf{e}_r$  であることに注意して、

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{n} \cdot (r^m \mathbf{e}_r) dS &= \iiint_V \nabla \cdot (r^{m-1} \mathbf{r}) dV = \iiint_V \{ \nabla (r^{m-1}) \cdot \mathbf{r} + r^{m-1} \nabla \cdot \mathbf{r} \} dV \\ &= \iiint_V \{ (m-1)r^{m-2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r} + 3r^{m-1} \} dV = (m+2) \iiint_V r^{m-1} dV \end{aligned}$$

である。これより明らかに  $m = -2$  のとき、

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} dS = \iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = 0$$

となる。

例)

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{F} dV$$

証明：— 簡単のため、直交座標系を  $x_1, x_2, x_3$ 、それぞれの単位ベクトルを  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  として、 $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}$ 、 $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$  とおくと、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F} = (n_2 F_3 - n_3 F_2) \mathbf{i} + (n_3 F_1 - n_1 F_3) \mathbf{j} + (n_1 F_2 - n_2 F_1) \mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$$

ここで、 $p, q, r$  を 1, 2, 3 とし互いに異なる数とする。すると、 $p, q, r$  の任意の組み合わせについて、

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial F_q}{\partial x_p} dx_p dx_q dx_r &= \iint_S (F_{q2} - F_{q1}) dx_q dx_r = \iint_{S_2} F_{q2} dx_q dx_r - \iint_{S_1} F_{q1} dx_q dx_r \\ &= \iint_{S_2} F_{q2} n_p dS_2 - \iint_{S_1} F_{q1} (-n_p) dS_1 = \oint_S n_p F_q dS \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS = \int_V \nabla \times \mathbf{F} dV$$

を得る。

【別解】  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \times \mathbf{A}$  (ただし  $\mathbf{A}$  は定ベクトル) をガウスの発散定理に代入すると、

$$\oint_S (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) dV$$

である。ここで、 $(\mathbf{f} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{A}$  であり、 $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{A}$  である。よつ

て、 $\mathbf{A}$  が定ベクトルであることから、上式は  $(\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS) \cdot \mathbf{A} = (\int_V \nabla \times \mathbf{f} dV) \cdot \mathbf{A}$  と書き直す

ことができる。これより、 $\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS = \int_V \nabla \times \mathbf{f} dV$  を得、 $\mathbf{f}$  を改めて  $\mathbf{F}$  と書き直すと、与えられた式となる。

$$\text{例) } \iiint_V \nabla^2 \phi dV = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$  である。よって、ガウスの発散定理より、 $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$  をもちいて

$$\iiint_V \nabla^2 \phi dV = \iiint_V \nabla \cdot \nabla \phi dV = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dS = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

を得る。

※ラプラス方程式  $\nabla^2 \phi = 0$  を満たす調和関数では、

$$\iiint_V \nabla^2 \phi dV = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0$$

である。

例)  $\nabla^2 \phi = 0$  のとき、

$$\iiint_V \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV = \iint_S \phi \frac{d\phi}{dn} dS$$

となる。

証明：－

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \nabla \phi = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi = (\nabla \phi)^2$$

なので、ガウスの発散定理において、体積積分は

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \iiint_V (\nabla \phi)^2 dV = \iiint_V \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV$$

であり、面積分は

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \phi \nabla \phi dS = \iint_S \phi (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) dS = \iint_S \phi \frac{d\phi}{dn} dS$$

となる。よって証明された。

例)

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi \mathbf{n} dS$$

証明：－

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iiint_V \left( \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV$$

被積分ベクトル関数の第1項について考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz &= \mathbf{i} \left( \iint_{S_2} \phi_2 dy dz - \iint_{S_1} \phi_1 dy dz \right) = \mathbf{i} \left( \iint_{S_2} \phi_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_1} \phi_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \right) \\ &= \mathbf{i} \iint_S \phi n_x dS = \iint_S \phi n_x \mathbf{i} dS \end{aligned}$$

同様にして、

$$\mathbf{j} \iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy dz = \iint_S \phi n_y \mathbf{j} dS, \quad \mathbf{k} \iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dy dz = \iint_S \phi n_z \mathbf{k} dS$$

を得る。これらの面積分を足し合わせると

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi n_x \mathbf{i} dS + \iint_S \phi n_y \mathbf{j} dS + \iint_S \phi n_z \mathbf{k} dS = \iint_S \phi \mathbf{n} dS$$

となる。

【別解】 ガウスの発散定理において、 $\mathbf{F} = \phi\mathbf{A}$  (ただし  $\mathbf{A}$  は定ベクトル) を代入する

と、面積分は  $\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \phi\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{A} \cdot \oint_S \phi \mathbf{n} dS$  となる。一方、体積積分は、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) dV = \int_V \{\nabla\phi \cdot \mathbf{A} - \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})\} dV = \mathbf{A} \cdot \int_V \nabla\phi dV$$

である。これらは等しく、 $\mathbf{A}$  の内積に対する項を比較すると、

$$\oint_S \phi \mathbf{n} dS = \int_V \nabla\phi dV$$

を得る。

### 3-4. グリーンの定理

グリーンの定理

平曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  においてスカラー関数を  $\phi(\mathbf{r})$ 、 $\chi(\mathbf{r})$  とすると、

$$(1) \quad \int_V (\phi\nabla^2\chi + \nabla\phi \cdot \nabla\chi) dV = \oint_S \phi\nabla\chi \cdot \mathbf{n} dS$$

$$(2) \quad \int_V (\phi\nabla^2\chi - \chi\nabla^2\phi) dV = \oint_S (\phi\nabla\chi - \chi\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。ただし、 $\mathbf{n}$  は平曲面の外側に向かって正に取る単位法線ベクトルである。

証明：—

$\mathbf{F} = \phi\nabla\chi$  とおくと、

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\phi\nabla\chi) = \phi\nabla^2\chi + \nabla\phi \cdot \nabla\chi$$

となる。また、 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \phi\nabla\chi \cdot \mathbf{n}$  となる。これらの結果をガウスの発散定理

$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$  に代入すると、

$$\int_V (\phi\nabla^2\chi + \nabla\phi \cdot \nabla\chi) dV = \oint_S \phi\nabla\chi \cdot \mathbf{n} dS$$

を得る。また、 $\phi$  と  $\chi$  を入れ替えると、

$$\int_V (\chi\nabla^2\phi + \nabla\chi \cdot \nabla\phi) dV = \oint_S \chi\nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS$$

となるので、これらの2式の差を取ると、

$$\int_V (\phi\nabla^2\chi - \chi\nabla^2\phi) dV = \oint_S (\phi\nabla\chi - \chi\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} dS$$

を得る。

例) グリーンの定理 (1) において、 $\phi = \chi$  とおくと、

$$\int_V \{\phi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi)^2\} dV = \oint_S \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \phi \frac{d\phi}{dn} dS$$

である。 $\phi$  が調和関数の時には  $\nabla^2 \phi = 0$  より、

$$\int_V (\nabla \phi)^2 dV = \oint_S \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \phi \frac{d\phi}{dn} dS$$

を得る。

## 3-5. ガウスの積分

閉曲面  $S$  上の点  $P$  の原点  $O$  の対する位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とし、 $S$  の内部から外部に向かう単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とするとき、

$$(1) \text{ 原点が } S \text{ の外部にあるとき、} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 0$$

$$(2) \text{ 原点が } S \text{ の内部にあるとき、} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

$$(3) \text{ 原点が } S \text{ 上にあるとき、} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 2\pi$$

となる。これをガウスの積分と言う。

証明：－

$$\phi = -\frac{1}{r} \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \nabla\phi &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{k} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{1}{r^2}\frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\mathbf{k} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

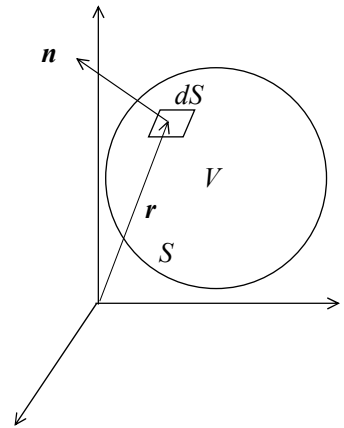
である。したがって、ガウスの発散定理を用いると、

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_S \nabla \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{1}{r}\right) dV \\ &= -\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV \end{aligned}$$

となる。最後の体積分においては、 $r$  は体積  $V$  内に含まれる点の原点からの距離である。したがって領域  $V$  がその内部に原点  $O$  を含まない場合には、 $1/r$  は連続で微分可能な関数となり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} - x \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3}\right) \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \end{aligned}$$

同様にして





$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

なので、

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

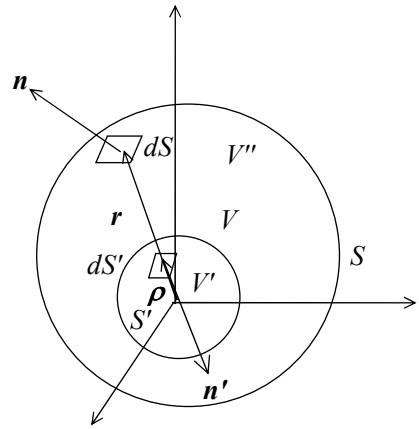
を得る。よって

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dV = 0$$

となる。

領域  $V$  がその内部に原点  $O$  を含む場合には、 $r \rightarrow 0$  で  $1/r \rightarrow \infty$  となって原点は特異点である。この場合には発散定理を用いることはできない。

そこで領域  $V$  内に原点  $O$  を囲む半径  $r$  の微小な球  $V'$  をとり、半径を  $\rho \rightarrow 0$  として極限を考える。微小球の表面を  $S'$  とすると、領域  $V'' = V - V'$  は外表面  $S$ 、内表面  $S'$  を有し、その内部では  $1/r$  は連続で微分可能な関数なので、発散定理を用いることができる。よって、上で計算したように



$$\int_{S+S'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S'} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n}' dS' = -\int_{V''} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dV = 0$$

である。ただし、 $\boldsymbol{\rho}$  は  $\rho$  に沿った原点  $O$  からの位置ベクトルであり、 $\mathbf{n}'$  は内表面  $S'$  の微小要素  $dS'$  の単位法線ベクトルである。これより、

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_{S'} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n}' dS'$$

を得る。さらに  $\mathbf{n}'$  は領域  $V''$  の内部から外部に向かうベクトルなので、表面  $S'$  から原点  $O$  に向かう内向きのベクトルとなることから、

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}' = -\rho \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}' = -\rho$$

であり、

$$-\oint_{S'} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n}' dS' = \oint_{S'} \frac{dS'}{\rho^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \phi d\phi d\theta}{\rho^2} = 4\pi$$

となる。この値は  $\rho$  の値によらず一定であって、 $\rho \rightarrow 0$  としても同じ結果となる。よって、

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi$$

となる。

原点  $O$  が表面にある場合には、半径  $\rho$  の部分球  $V'$  をその周りにとり、上と同様の計算を行えばよい。このとき、 $\rho \rightarrow 0$  では部分球は半球に近づいていくので

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( - \oint_{S'} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n}' dS' \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{S'} \frac{dS'}{\rho^2} = 2\pi$$

となり、

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}}{\rho^3} \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi$$

となる。

### 3-6. ストークスの定理

ストークスの補助定理

曲面上で閉曲線  $C$  で囲まれた領域  $S$  において、関数  $f(x, y, z)$  は連続で 1 回微分可能であるとき、

$$\iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \right) = \oint_C f dx$$

となる。ただし、 $C$  に沿った積分は領域  $S$  が左側に見えるように回る向きを正とする。

証明：—

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  として、 $\nabla \times \mathbf{f}\mathbf{i}$  を考えると、

$$\nabla \times \mathbf{f}\mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k}$$

となる。また、 $S$  上の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$  とすると、

$$(\nabla \times \mathbf{f}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} dS = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial f}{\partial z} n_y dS - \frac{\partial f}{\partial y} n_z dS$$

を得る。ここで、 $n_y dS = dz dx$ 、 $n_z dS = dx dy$  なので、

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}dS = \frac{\partial f}{\partial z} dzdx - \frac{\partial f}{\partial y} dxdy$$

より、

$$\iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} dzdx - \frac{\partial f}{\partial y} dxdy \right) = \int_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}dS = \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n}dS$$

である。

$f(x, y, z)$ において、 $z$ を $x, y$ の関数として $z = \varphi(x, y)$ とし、改めて

$$P(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$$

と置きなおす。ここで、

$$dz = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

なので

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy \end{aligned}$$

である。これより、 $P$ を $y$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

となることがわかる。これより、

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} dzdx - \frac{\partial f}{\partial y} dxdy \right) &= \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n}dS \\ &= \int_S \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{j} - \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \cdot \mathbf{n}dS \\ &= - \int_S \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}dS + \int_S \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n}dS \end{aligned}$$

を得る。このうち第1項は、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}dS = n_z dS = dxdy$ であるので、2次元におけるグリーンの定理の証明でおこなったように、

$$\iint_{S_o} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \oint_{C_o} P(x, y) dx$$

となる。ここで $S_o, C_o$ はそれぞれ $S, C$ の $xy$ 平面上への射影であり、 $S_o, C_o$ と $S, C$ での $x, y$ の値は変わらないから、結局、

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \oint_{C_o} P(x, y) dx = - \oint_C f(x, y, z) dx$$

とできる。

また、曲面の点のベクトルを  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x, y)\mathbf{k}$  とできるので、 $y$  方向の偏微分は、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{k}$$

であることに気づくと、この  $y$  方向の接線ベクトルは単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に垂直なので

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \mathbf{n} = \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \therefore \int_S \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

を得る。以上より、

$$\iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \right) = \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times f\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C f(x, y, z) dx$$

を得る。

$f(x, y, z)$ 、 $g(x, y, z)$ 、 $h(x, y, z)$  が曲面  $S$  ならびにこれを取り囲む閉曲線  $C$  において連続で 1 回微分可能であり、ベクトル関数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

を与えるものとする。このとき、

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S \{ \nabla \times (f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}) \} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S (\nabla \times f\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\nabla \times g\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\nabla \times h\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

とできる。上の定理で述べたように、

$$\int_S (\nabla \times f\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C f(x, y, z) dx$$

であり、他の項についても同様に、

$$\int_S (\nabla \times g\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C g(x, y, z) dy, \quad \int_S (\nabla \times h\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C h(x, y, z) dz$$

となる。ここで、

$$\oint_C f dx + \oint_C g dy + \oint_C h dz = \oint_C (f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

であるので、結局

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

となる。これより以下の定理を得る。

ストークスの定理

曲面上で閉曲線  $C$  で囲まれた領域  $S$  において、ベクトル関数  $\mathbf{F}$  が連続でかつ 1 回微分可能であるとき、

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dS$$

となる。

例) 曲面上で閉曲線  $C$  で囲まれた領域  $S$  において、ベクトル関数  $\mathbf{f}$  が連続でかつ 1 回微分可能であるとき、

$$\int_C \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \int_S \{(\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f}\} dS = - \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{f} dS$$

となる。

証明:  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \times \mathbf{A}$ 、ただし  $\mathbf{A}$  は定ベクトルとしてストークスの定理に代入すると、

$$\int_C (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A} \cdot \int_C (\mathbf{f} \times d\mathbf{r})$$

一方、 $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{f}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{f} - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{f})$  であるので、

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{n} \cdot \{\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{A})\} dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot \{(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{A}\} dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \{(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n}\} dS \\ &= \mathbf{A} \cdot \int_S \{(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n}\} dS \end{aligned}$$

であるので、

$$\int_C (\mathbf{f} \times d\mathbf{r}) = \int_S \{(\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f}\} dS$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
& (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f} \\
&= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) \\
&\quad - \left( n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}) \\
&= \left( n_x \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_x \frac{\partial f_y}{\partial y} + n_x \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_x \frac{\partial f_x}{\partial x} - n_y \frac{\partial f_x}{\partial y} - n_z \frac{\partial f_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left( n_y \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial f_y}{\partial y} + n_y \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_x \frac{\partial f_y}{\partial x} - n_y \frac{\partial f_y}{\partial y} - n_z \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\
&\quad + \left( n_z \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_z \frac{\partial f_y}{\partial y} + n_z \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_x \frac{\partial f_z}{\partial x} - n_y \frac{\partial f_z}{\partial y} - n_z \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\
&= \left( n_x \frac{\partial f_y}{\partial y} + n_x \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_y \frac{\partial f_x}{\partial y} - n_z \frac{\partial f_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( n_y \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_x \frac{\partial f_y}{\partial x} - n_z \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\
&\quad + \left( n_z \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_z \frac{\partial f_y}{\partial y} - n_x \frac{\partial f_z}{\partial x} - n_y \frac{\partial f_z}{\partial y} \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

一方、

$$\mathbf{n} \times \nabla = \mathbf{i} \left( n_y \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \mathbf{j} \left( n_z \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left( n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

より

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{f} \\
&= \left\{ \left( n_z \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial z} \right) f_z - \left( n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y \right\} \mathbf{i} + \left\{ \left( n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x - \left( n_y \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial y} \right) f_z \right\} \mathbf{j} \\
&\quad + \left\{ \left( n_y \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial y} \right) f_y - \left( n_z \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial z} \right) f_x \right\} \mathbf{k} \\
&= - \left( n_x \frac{\partial f_y}{\partial y} + n_x \frac{\partial f_z}{\partial z} - n_y \frac{\partial f_x}{\partial y} - n_z \frac{\partial f_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( n_y \frac{\partial f_z}{\partial z} + n_y \frac{\partial f_x}{\partial x} - n_z \frac{\partial f_z}{\partial y} - n_x \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{j} \\
&\quad - \left( n_z \frac{\partial f_x}{\partial x} + n_z \frac{\partial f_y}{\partial y} - n_x \frac{\partial f_z}{\partial x} - n_y \frac{\partial f_z}{\partial y} \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$(\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{f} = -(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{f}$$

であるので、

$$\int_C \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = - \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{f} dS$$

を得る。

例) 閉曲線  $C$  で囲まれた曲面  $S$  について、

$$\int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \int_S \mathbf{n} dS$$

となる。

証明：—先の例において、 $\mathbf{f} = \mathbf{r}$  とおくと、右辺は

$$\begin{aligned} & \int_S \{(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{r}\} dS \\ &= \int_S \left\{ 3\mathbf{n} - \left( n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \right\} dS \\ &= \int_S \{ 3\mathbf{n} - (n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}) \} dS = 2 \int_S \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

となるので証明された。

※平面上に  $C$ 、 $S$  がある場合には、 $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  と同じ向きの単位法線ベクトルであつて場所に拠らず一定であり、 $\int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\mathbf{n} \int_S dS$  より、 $S = \frac{1}{2} \int_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  とできる。