

「原子力・放射線と環境」ガイダンステキスト

(平成20年度版)

鹿児島大学工学部 機械工学科 中村祐三

I. 原子核と放射線

I-1. 原子核の質量とエネルギー

原子核の種類を言う場合、核種という言葉を用いる。原子核は軌道電子と同じ数で正の電荷をもつ陽子 (proton, p) を Z 個有し、電荷をもたない中性子 (neutron, n) を N 個有する。陽子と中性子の質量はそれぞれ電子の1836倍、1838倍であり、殆ど差がない。このように陽子と中性子の質量に殆ど差がないこと、ならびに原子核の性質が陽子と中性子の個数で決まることから、陽子と中性子を核子といい、 $A=Z+N$ を質量数という。元素 X の原子核 (核種) を表す場合には、



のように表記する。陽子の数が同じでも中性子の数が異なる場合、同位体 (アイソトープ, isotope) という。原子核の半径を R とすると、

$$R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \quad \text{m}$$

で表される。原子の半径が 10^{-10} m のオーダーであることに比べると、如何に原子核が小さいかわかるであろう。

原子、電子、原子核の質量を表す場合に、原子質量単位 (atomic mass unit, amu もしくは u) がよく用いられる。原子質量単位は $Z=6$ 、 $N=6$ 、 $A=12$ の炭素 C の原子の質量を 12 u として定め、

$$1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

である。相対性理論によれば、質量はエネルギーと等価であり、質量を m 、エネルギーを E 、光の速度を c ($=2.9979 \times 10^8$ m/s) とすると、

$$E = mc^2$$

で表される。またエネルギーの単位には eV (エレクトロンボルト、 $1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19}$ J) を使うのが通常である。よって、1 u をエネルギーに換算すると以下ようになる。

$$1 \text{ u} = 1.492 \times 10^{-10} \text{ J} = 931.5 \text{ MeV}$$

I-1-1. 中性子の崩壊

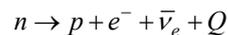
陽子、中性子、電子の質量をそれぞれ M_p 、 M_n 、 m_e とすると、

$$M_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.00728 \text{ u} \\ = 938.254 \text{ MeV}$$

$$M_n = 1.67493 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.00866 \text{ u} \\ = 939.547 \text{ MeV}$$

$$m_e = 9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.0005486 \text{ u} \\ = 0.511 \text{ MeV}$$

である。中性子は陽子よりも若干質量が大きい、すなわちエネルギー的に高い状態にある。このため中性子は自然界では単独に安定に存在せず、以下のような崩壊現象を通じて陽子と電子 (e^-) ならびに反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) を放出する。



ここで Q は放出されたエネルギーであり、陽子、電子、反電子ニュートリノの運動エネルギーとして使われる。ニュートリノの質量は非常に小さく無視してよいので、 Q の値は崩壊前後のエネルギー差として、

$$Q \approx [M_n - (M_p + m_e)] c^2 \\ = 939.547 - 938.254 - 0.511 \\ = 0.782 \text{ MeV}$$

で与えられる。ここで、原子核に陽子をもち、軌道電子が1個である水素原子において、陽子と軌道電子の結合エネルギーがイオン化エネルギー 13.6 eV であることを考慮すると、原子核の崩壊で放出されるエネルギーは原子核と軌道電子の結合エネルギーよりもはるかに大きいことがわかる。このことより、原子核の崩壊や反応に預かるエネルギーの計算では、軌道電子の結合エネルギーは無視してよい。

今、上記の反応で、静止している中性子が崩壊して、放出されたエネルギー Q が陽子と電子の運動エネルギーにのみ分配されることを考えてみる。陽子の運動エネルギーを E_p 、電子の運動エネルギーを E_e とすると、エネルギー保存則より

$$E_p + E_e = Q$$

となる。また、陽子と電子の運動量をそれぞれ p_p 、 p_e とすると、運動量保存則より、

$$p_p + p_e = 0$$

となる。ここで、陽子の速度を V_p 、電子の速度を

v_e とし、古典力学が成り立つと仮定すると（この仮定は正しくなく、厳密には相対性理論を用いなければならない）、

$$E_p = M_p V_p^2 / 2 = p_p^2 / (2M_p)$$

$$E_e = m_e v_e^2 / 2 = p_e^2 / (2m_e)$$

である。よって、

$$E_e = Q - K_p = Q - p_p^2 / (2M_p)$$

$$= Q - (-p_e)^2 / (2M_p)$$

$$= Q - E_e (m_e / M_p)$$

となるので、

$$E_e = M_p Q / (m_e + M_p)$$

$$E_p = m_e Q / (m_e + M_p)$$

を得る。ここで $M_p \gg m_e$ であったので、 $E_e \approx Q$ 、 $E_p \approx 0$ であって、エネルギー Q の殆どは軽い粒子である電子の運動エネルギーとして伝達されることになる。同様にして、非常に軽い反電子ニュートリノの運動エネルギーにもっぱら使われる。このように、運動エネルギーを持って放出される粒子のことを放射線という。

放射線は γ 線や X 線のように電磁波として放出される場合もある。このとき、電磁波を量子（光子）とみなすと、エネルギーは

$$E = h\nu = h\lambda / c$$

で表される。ここで、 h はプランク定数、 ν は振動数、 λ は波長、 c は光の速度である ($\nu = \lambda / c$ であることに注意)。また、運動量は de Broglie の関係

$$p = h / \lambda$$

で表される。なお、プランク定数は

$$h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$= 4.31567 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

である。

I-1-2. 質量欠損

次に、原子番号 Z の元素の原子の質量について考えてみる。この原子は、電子と陽子を Z 個、中性子を N 個集めてできるので、その質量は

$$M' = (M_p + m_e)Z + M_n N$$

となることが予想される。例えば $^{12}_6\text{C}$ の原子 1 個の質量は上の評価式では

$$M' = (1.00728 + 0.00055) \times 6 + 1.00866 \times 6$$

$$= 12.009894 \text{ u}$$

である。しかし、実測されている質量は $M = 12 \text{ u}$ である。従って、 $^{12}_6\text{C}$ の原子は、電子、陽子、中性子がばらばらである状態よりも

$$\Delta M = M' - M = 0.009894 \text{ u}$$

だけ軽い。これを質量欠損という。質量欠損をエネルギーに換算すると、

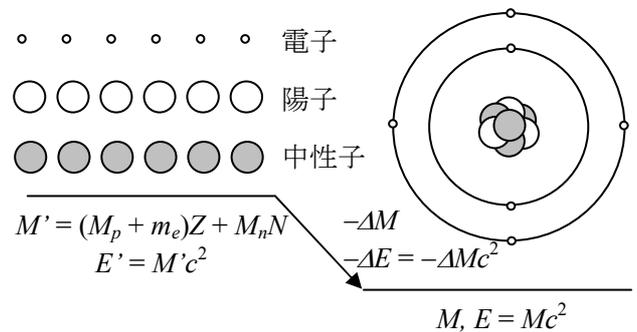
$$\Delta E = \Delta M c^2 = 92.16 \text{ MeV}$$

だけ $^{12}_6\text{C}$ の原子は構成粒子がばらばらであるとき

よりもエネルギー的に安定である。先にも述べたように、軌道電子と原子核の結合エネルギーはこれよりもはるかに小さいので、このエネルギーは原子核における核子の結合エネルギー B として考えてよい。よって核子一個あたりの結合エネルギーは、

$$\frac{B}{A} = -\frac{\Delta E}{A} = \frac{92.16}{12} = 7.68 \text{ MeV/核子}$$

となる。



I-1-3. 原子核の液滴モデル

原子核の古典的描写として、原子核を水分子からなる水滴のように考える液滴モデルがある。液滴モデルでは、

- 1) 核子が一様なエネルギー ϵ_b で結合する。
- 2) 表面にある核子はエネルギー的に高い状態にあり、そのエネルギーを ϵ_s とする。
- 3) 陽子は正の電荷を持つので、互いに反発力が作用する。静電エネルギーは電荷の 2 乗に比例するので、陽子の数の 2 乗当たり静電エネルギーが ϵ_c だけ高い。
- 4) 陽子と中性子は互いに一対になろうとする傾向がある。よってこの比からずれた場合にはエネルギー ϵ_a だけ高い。
- 5) 実験的に陽子の数と中性子の数が偶数、奇数であることによって安定性が左右されることがわかっている。

ということを取り入れて、以下の式を導いている。

$$\frac{B}{A} = \epsilon_b - \frac{\epsilon_s}{A^{1/3}} - \frac{\epsilon_c Z(Z-1)}{A^{4/3}} - \frac{\epsilon_a (A-2Z)^2}{A^2}$$

$$+ \frac{\delta(N, Z)}{A^{3/2}}$$

これは、Weizsäcker あるいは Bethe-Weizsäcker の質量公式と呼ばれる。各項のエネルギーは、

$$\varepsilon_b = 15.78 \text{ MeV}, \quad \varepsilon_s = 18.34 \text{ MeV}$$

$$\varepsilon_a = 23.21 \text{ MeV}, \quad \varepsilon_c = 0.710 \text{ MeV}$$

であり、最後の項は

$$\delta(N, Z) = 12 \text{ MeV}, \quad N, Z = \text{偶数}$$

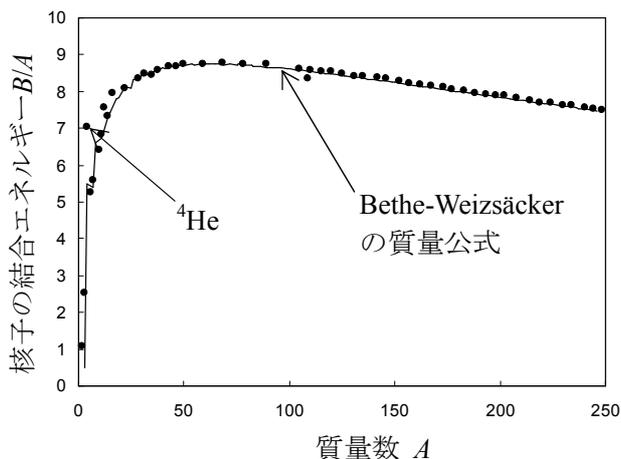
$$\delta(N, Z) = 0, \quad A = N + Z = \text{奇数}$$

$$\delta(N, Z) = -12 \text{ MeV}, \quad N, Z = \text{奇数}$$

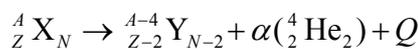
となる。

I-1-4. α 崩壊

下の図は、Weizsäcker の式を用いて核子の結合エネルギー B/A を計算したものであり、図中の●印は実測値である。この図から、 B/A の最大値が質量数で 60 程度（鉄やニッケル）のところに位置することがわかる。これよりも質量数が増加すると、核子の結合エネルギーは減少し、原子核は不安定になっていく。質量数 A が 200 を越える自然界の原子核では、 ${}^4\text{He}$ の原子核を放出してエネルギー的により安定な原子核になる場合がある。



これを α 崩壊という。 α 崩壊では、



のように親核種 X が、原子番号が 2、中性子数が 2、質量数が 4 だけ減少した娘核種 Y となる。放出されるエネルギーは、

$$Q = [M_X - (M_Y + M_\alpha)]c^2$$

であり、原子核 Y の運動エネルギー E_Y と α 粒子の運動エネルギー E_α はそれぞれ、

$$E_Y = M_\alpha Q / (M_Y + M_\alpha)$$

$$E_\alpha = M_Y Q / (M_Y + M_\alpha)$$

となる。ここで M_X, M_Y, M_α はそれぞれ原子核 X, Y ならびに α 粒子 (${}^4\text{He}$) の質量である。

I-1-5. α 崩壊のトンネル効果

核種 Y が核種 X よりもエネルギー的に低いからといって直ちに α 崩壊が生じるのではない。放出されるべき α 粒子は、 X の原子核に捕獲されており、これから抜け出す確率は量子力学に現れるトンネル効果で説明できる。

古典力学によれば、運動エネルギーを K 、ポテンシャルエネルギーを V とすると、全エネルギー E は

$$K + V = E = \text{一定}$$

となって保存されることを学んできた。今、1次元の場合をとり、

$$\psi(x, t) = A e^{2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right)}$$

で表される波動関数を考える。 A は定数であり、 i は虚数単位である。これは x 方向に進行する波長 λ 、振動数 ν の平面波を表す。 x の二次微分は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A e^{2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right)} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \psi$$

となる。一方、粒子の運動量 p は de Broglie の関係より、粒子を波とみなした場合の波長 λ と

$$p = h / \lambda$$

で関係付けられる。また、粒子の質量を m とすると、動エネルギーが $K = p^2 / (2m)$ であることから、

$$- \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \psi = K \psi$$

となる。次に、時間 t に関する一次微分を取ると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i(2\pi\nu) A e^{2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right)} = -i(2\pi\nu) \psi$$

となる。ここでエネルギーが $E = h\nu$ であったことを思い出すと、

$$- \frac{1}{i} \left(\frac{h}{2\pi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi$$

となる。以上より、ポテンシャルエネルギー V に ψ をかけてエネルギー保存則を満たす $(K + V)\psi = E\psi$ として、以下のシュレディンガー方程式を得る。

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ただし、 $\hbar = h / (2\pi)$ である。

ポテンシャルが位置のみの関数である場合には、 $\psi(x, t) = \phi(x)T(t)$ と変数分離して x, t に関する

それぞれの解を求めることができる。すなわち

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial T}{\partial t} = W$$

とできる。ここで W は未知の定数である。これより、 $T(t)$ の解として

$$T(t) = e^{-iWt/\hbar}$$

を得る。これを用いると

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial T}{\partial t} \phi = W e^{-iWt/\hbar} \phi = W \psi$$

であることから、 $W = E$ が導かれる。従って、時間に依存しないシュレディンガー方程式として、

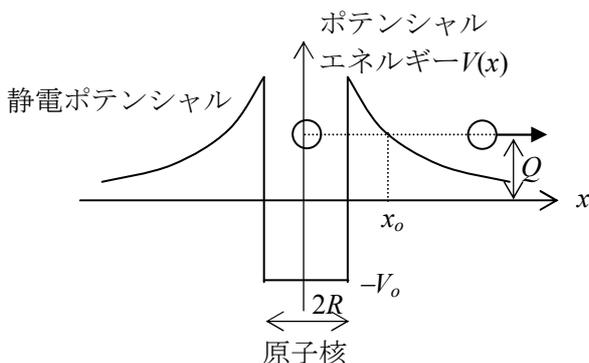
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V \phi = E \phi$$

をえる。

さて、左下図のように、 α 粒子が半径 R 、陽子数 Z の原子核に閉じ込められている場合、そのポテンシャルエネルギーを $-V_0$ とする。 α 粒子が原子核の外に出ると、原子核の陽子数は $Z-2$ に減る。原子核と α 粒子の $+2$ の電荷により静電ポテンシャルは、 $V_c(x) = k \frac{2(Z-2)e^2}{x}$

$$V_c(x) = k \frac{2(Z-2)e^2}{x}$$

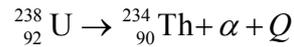
となる。ここで k は定数である ($k = 8.988 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{C}^2$)。 α 粒子が原子核から無限に離れたところでは、 α 粒子のエネルギーは運動エネルギー E_α となる。一方、 α 粒子を放出した原子核も運動エネルギー E_Y を有する。このため、両者の粒子でわけあった全てのエネルギーは $Q = E_\alpha + E_Y$ であり、よって、静止している原子核内において α 粒子が Q のエネルギーを有するものとみなして、原子核のポテンシャル井戸から、静電ポテンシャルによる障壁を越えて、原子核外に抜け出る確率を求めればよい。古典力学ではこのようにポテンシャル障壁が粒子の運動エネルギーよりも高い場合には、粒子は障壁を乗り越えることはできない。し



かし、量子力学では障壁を乗り越える確率が発生する。これをトンネル効果という。

一方、静電ポテンシャルの最大値は原子核から α 粒子がまさに離れようとする距離 R' を用いて計算する。 α 粒子が出た後の原子核 Y の半径を R_Y 、 α 粒子の原子核の半径を R_α とすると、 $R' = R_Y + R_\alpha$ を用いて、 $V_{max} = V_c(R') = 2k(Z-2)e^2/R'$ となる。静電ポテンシャルと α 粒子の運動エネルギーが同じになる位置は $x_0 = 2k(Z-2)e^2/E_\alpha$ で与えられる。

具体的な計算を行ってみる。 $Z = 92$ の ^{238}U は α 粒子を放出して $Z = 90$ の ^{234}Th に崩壊する。すなわち、



となる。 ^{234}Th の原子核の半径は $R_Y = 1.2 \times 10^{-15} \times (234)^{1/3} = 7.49 \times 10^{-15} \text{ m}$ であり、 ^4He の原子核の半径は $R_\alpha = 1.25 \times 10^{-15} \times (4)^{1/3} = 1.90 \times 10^{-15} \text{ m}$ である。よって、 $R = 9.39 \times 10^{-15} \text{ m}$ となる。これより、最大の静電ポテンシャルは、 $V_{max} = 8.988 \times 10^9 \times 2 \times 90 \times (1.602 \times 10^{-19})^2 / (9.39 \times 10^{-15}) = 4.42 \times 10^{-12} \text{ J} = 27.6 \text{ MeV}$ となり、 α 粒子のエネルギーよりも約 7 倍高い。また、同様にして、 x_0 の値は $x_0 = 62 \times 10^{-15} \text{ m}$ となり、 R よりも約 6 倍大きい。

また、 ^{238}U の質量は 238.050788 u 、 ^{234}Th の質量は 234.043601 u 、 ^4He の質量は 4.002603 u であるので、

$$Q = (238.050788 - 234.043601 - 4.002603) \times 931.5 = 4.27 \text{ MeV}$$

となる。このとき α 粒子の運動エネルギーは、 $E_\alpha = 234 \times Q / (234 + 4) = 4.20 \text{ MeV}$ となる。

上の計算からわかるように、ポテンシャル障壁の高さは α 粒子のエネルギーよりも著しく高く、その幅も原子核の半径よりもはるかに大きい。このとき、原子核内の α 粒子がポテンシャル障壁を通り抜けて核外に出る確率 p は、シュレディンガー方程式を解くと、

$$p = e^{-2G}$$

で与えられる。ただし

$$G = \frac{2\pi V_{max} R}{h} \sqrt{\frac{2M_r}{Q}} \times \left[\cos^{-1} \left(\frac{Q}{V_{max}} \right)^{1/2} - \left\{ \frac{Q}{V_{max}} \left(1 - \frac{Q}{V_{max}} \right) \right\}^{1/2} \right]$$

である。ここで、 μ は換算質量と呼ばれ、

$$M_r = \frac{M_Y M_\alpha}{M_Y + M_\alpha}$$

である。

このようにして、崩壊前の原子核内において閉じ込められていた α 粒子がポテンシャル障壁に 1 回ぶつかる時、これを通り抜ける確率 p を求めることができた。次に、ポテンシャル障壁に 1 秒間あたり何回 α 粒子がぶつかっているであろうか？これは、次のように簡単に表せる。通り抜けた後の原子核 Y が静止しているものとする、 α 粒子は $Q = M_r v^2 / 2$ の運動エネルギーをもって運動しているとみなせる。よって、原子核から飛び出す前には、速度 v で $2R'$ の距離を行ったり来たりしていることになるので、ポテンシャル障壁にぶつかる 1 秒間あたりの回数は、

$$f = \frac{v}{2R'} = \frac{1}{2R'} \left(\frac{2Q}{M_r} \right)^{1/2}$$

と見積もることができる。

以上より、1 秒間あたりに α 粒子が放出される頻度、すなわち、 α 崩壊の頻度は、

$$\lambda = fp$$

となる。実際に ^{238}U の α 崩壊について

$$M_r = 3.935 \text{ u} = 6.535 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$Q = 6.841 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$V_{\max} = 4.27 \times 10^{-12} \text{ J}$$

のように SI 単位に全て直して計算すると、

$$G = 43.8$$

$$p = 9.04 \times 10^{-39}$$

$$f = 7.70 \times 10^{20} / \text{sec}$$

を経て、

$$\lambda = 6.96 \times 10^{-18} / \text{sec}$$

を得る。後に述べるように、 λ は崩壊定数と呼ばれ、 ^{238}U の α 崩壊の崩壊定数の実測値は $\lambda = 4.92 \times 10^{-18} / \text{sec}$ であり、量子力学に基づいたトンネル効果の計算結果と大体あっている。

さて、崩壊定数 λ の対数を取ると、

$$\ln \lambda = \ln \left\{ \frac{1}{2R'} \left(\frac{2Q}{M_r} \right)^{1/2} \right\} - 2G$$

となる。右辺の第 1 項は Q の変化に対して小さな変化しかもたらさないのほぼ定数とみなせる。第 2 項は $Q \ll V_{\max}$ のとき、 $\cos^{-1}(Q/V_{\max})^{1/2} \approx \pi/2 - (Q/V_{\max})^{1/2}$ 、 $(Q/V_{\max})^{1/2} \{1 - (Q/V_{\max})\}^{1/2} \approx (Q/V_{\max})^{1/2}$ と近似できるから、

$$G \approx \frac{\pi^2 R \sqrt{2M_r V_{\max}}}{h \sqrt{Q}} - \frac{4\pi R \sqrt{2M_r V_{\max}}}{h}$$

さらに原子番号が大きいときには $Z-2 \approx Z$ であり、 V_{\max} が Z に比例すること、あまり大きくない Z の変化には $Z^{1/2}$ はほぼ一定であること、ならびに $Q \approx E_\alpha$ より、

$$G \approx \frac{a'Z}{\sqrt{E_\alpha}} - b'$$

とおくことができる。これより、新しく係数を a 、 b と置きなおして

$$\ln \lambda \approx -\frac{aZ}{\sqrt{E_\alpha}} + b$$

を得る。これをガイガー・ヌッタルの式と言い、当初、ガイガーとヌッタルによって実験的に導かれた関係式である。

I-1-5. β 崩壊

Weizsäcker の公式において、質量数を一定とし、原子番号を変化させてみることを考えてみる。すると、

$$\frac{B}{A} = -\left(\frac{\epsilon_c}{A^{4/3}} + \frac{4\epsilon_a}{A^2} \right) Z^2 + 2\left(\frac{\epsilon_c}{2A^{4/3}} + \frac{2\epsilon_a}{A} \right) Z + \epsilon_b - \frac{\epsilon_s}{A^{1/3}} - \epsilon_a + \frac{\delta(N, Z)}{A^{3/2}}$$

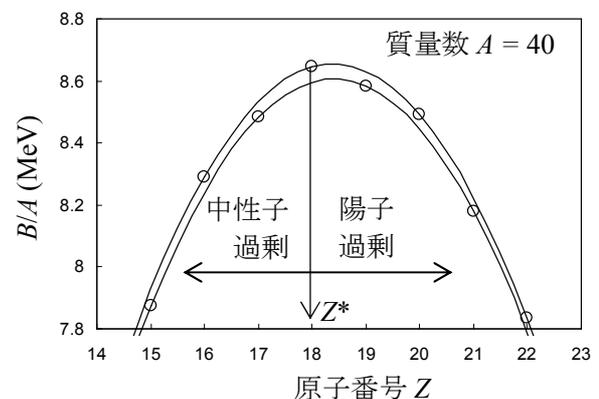
のように原子番号 Z の 2 次方程式になることがわかる。核子の結合エネルギーが最大となる、すなわち原子核が安定になるのは

$$Z^* = (4\epsilon_a + \epsilon_c / A^{1/3}) A / (8\epsilon_a + 2\epsilon_c A^{2/3})$$

であることは 2 次方程式の性質からすぐ理解できる。ここで、実測されたエネルギーを用いると、 $\epsilon_a \gg \epsilon_c > \epsilon_c / A^{1/3}$ であることから、

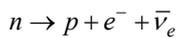
$$Z^* \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.25(\epsilon_c / \epsilon_a) A^{2/3}}$$

と簡単な式に近似できる。実際には、下の図に示すように、陽子と中性子の数の偶奇によって原子核の安定性が左右されるので、これも考慮に入れてエネルギー的にもっとも安定な原子核となる。

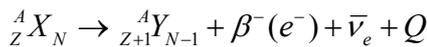


この2次方程式から得られる安定な陽子数から、まず、 $0.25(\epsilon_c/\epsilon_a) = 0.00765$ なので、質量数が小さい場合、安定な原子核は $Z^* \approx A$ となることがわかる。質量数が大きいと、安定な原子核では $Z^* < A/2$ なので、中性子の数の方が、陽子の数よりも多くなる。実際に $A = 238$ を代入して計算すると $Z^* = 92$ となる。これは、天然に存在するウラン U ($Z = 92$) のうち、もっとも存在比が大きい ^{238}U に相当する。このように質量数が大きくなるにつれて、陽子よりも中性子が多くなるのは、陽子の静電反発力によるエネルギーがその数とともに増加するためである。

次に、同じ質量数 A の原子核を比較すると、陽子の数が $Z < Z^*$ の場合、すなわち、中性子が安定な数よりも過剰な場合には、中性子が陽子に変わって原子核をより安定にする傾向がある。この場合、原子核内での中性子から陽子への変換は、I-1-1 節で述べたように、電子と反電子ニュートリノの放出を伴った

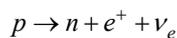


で表される。よって、親核種 X は、

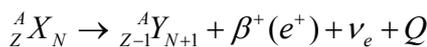


のように、原子番号が1だけ増え、中性子数が1だけ減った娘核種 Y に崩壊する。この崩壊のことを β^- 崩壊という。また放出される電子のことを β^- 粒子という。放出されるエネルギー Q は、もっぱら β^- 粒子と反電子ニュートリノの運動エネルギーとして用いられ、 β^- 粒子の運動エネルギーは $0 \sim Q$ の連続的な分布をもち、平均の運動エネルギーは $Q/3$ 程度となる。

$Z > Z^*$ の場合、すなわち、原子核における陽子の数が安定な場合よりも過剰な場合には、陽子は中性子に変換して、原子核が安定になろうとする傾向がある。このときの陽子の崩壊は、

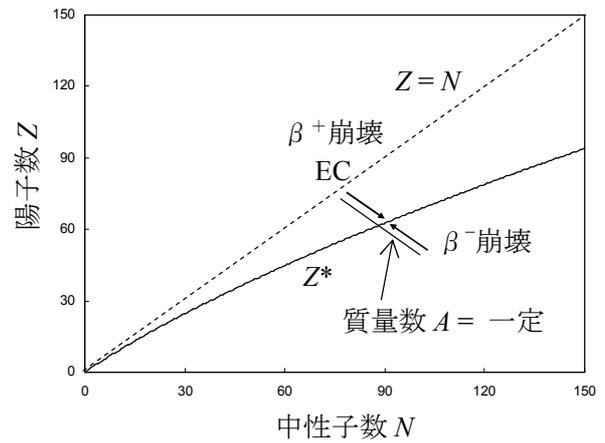


で表される。 e^+ は質量が同じで正電荷をもつよう電子 (positron) であり、 ν_e は電子ニュートリノである。よって、親核種 X は



のように、原子番号が1だけ減り、中性子数が1だけ増える娘核種 Y に崩壊する。これを β^+ 崩壊といい、放出される陽電子を β^+ 粒子という。 β^+ 粒子の運動エネルギーも単一ではなく、連続的な分布をとる。

ここで、 β^+ 崩壊で放出されるエネルギーを計算すると、原子 X が原子 Y よりも一個余分に電子



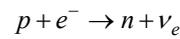
を持っていることを考慮して

$$Q = [M_X - (M_Y + 2m_e)]c^2$$

であるので、 β^+ 崩壊が起こる条件は、 $Q > 0$ より、

$$(M_X - M_Y)c^2 > 2m_e c^2 = 1.022 \text{ MeV}$$

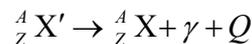
でなければならない。よって、核種 Y が核種 X よりもエネルギー的に安定だからというだけでは、 β^+ 崩壊が起こり β^+ 粒子が放出されるわけではない。 $0 < (M_X - M_Y)c^2 < 1.022 \text{ MeV}$ のときには、原子核は K 殻の軌道電子を捕獲して、



のように、陽子が電子と反応し、中性子と電子ニュートリノを作る。これを電子捕獲 (electron capture, EC) という。電子捕獲では電子ニュートリノ以外に、原子核から放出される粒子はない。しかし、空位になった K 軌道電子殻によりエネルギー的に高い状態にある L 軌道、M 軌道の電子が落ち込む際に、これらの電子状態の差に相当するエネルギーを有する X 線 (特性 X 線) が放出される。

I-1-5. γ 崩壊

これまで述べてきたように、質量数が大きい場合には α 崩壊、中性子や陽子が過剰な場合には β 崩壊が生じる。このような崩壊の後、娘核種の原子核は、それが本来あるべきエネルギー状態 (基底状態) よりも高い励起状態にある場合が多い。このとき、励起状態にある原子核 X' はエネルギーを電磁波、すなわち γ 線として放出し、より安定なエネルギー状態の原子核 X になる。これを γ 崩壊という。



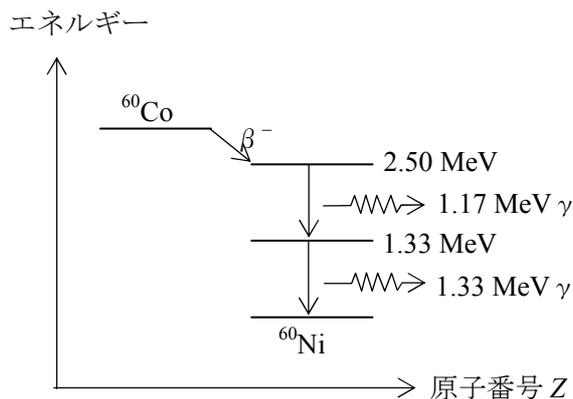
γ 崩壊では核種は変化しない。また、観測され

る γ 線のエネルギー Q は飛び飛びの値を示す。このことは、原子核の励起状態が連続的な分布を有するのではなく、飛び飛びの状態をもっていることを意味している。 i 番目の励起状態のエネルギーを E_i 、これよりも低い状態のエネルギーを E_j とすると、 γ 線のエネルギーは

$$Q = h\nu = E_i - E_j$$

で与えられる。

例えば、工業、農業、医療等で用いられる ^{60}Co は、1.17 MeV と 1.33 MeV の γ 線を放出する。これは下の崩壊図のように、 ^{60}Co が β^- 崩壊して形成される ^{60}Ni には、基底状態から 1.33 MeV と 2.50 MeV だけ高い二つの励起状態がある。それぞれの遷移過程で生じるエネルギー差の γ 線が生じる。このとき、エネルギー状態から別のエネルギー状態へ遷移する確率があり、 ^{60}Co の場合には、2.50 MeV の状態から 1.33 MeV の状態への遷移と、1.33 MeV の状態から基底状態への遷移がもつぱらである。

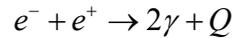


原子核から放出される γ 線のエネルギーが低く、軌道電子の結合エネルギー程度であると、 γ 線が軌道電子をたたき出す確率が生まれる。この過程では、 γ 線は原子から放出されず、電子が放出されることになる。この現象を内部転換 (internal conversion, IC) という。電子が叩き出された後の空位の高いエネルギー状態を埋めるために、より高いエネルギー準位の軌道から電子が落ち込む際、特性 X 線が発生するため、X 線も放出される。

I-1-6 電子対消滅による γ 線発生

γ 線の発生には、これまで述べた原子核の励起状態に因らない別のメカニズムがある。陽電子は不安定であり、電子と衝突するとお互いに消滅す

る。これを電子対消滅という。電子対消滅によって、電子と陽電子がもっていた質量がエネルギーの形として電磁波、すなわち γ 線に託される。これは以下のように書ける。



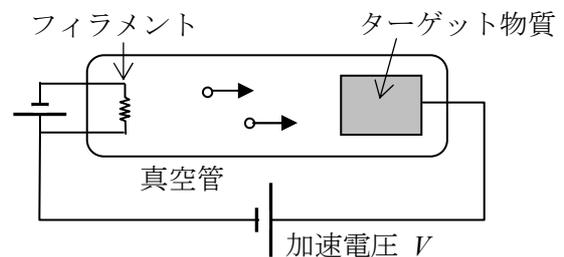
電子と陽電子がほとんど静止している状態では、

$$Q = 2m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

であり、平均として 2 個の γ 線が反対方向に形成されるので、それぞれの γ 線のエネルギーは 0.511 MeV となる。電子対消滅前に電子や陽電子が運動エネルギーを持っている場合には、これを上記に足せばよい。電子対消滅は、正の電荷をもつ陽電子の物質や生体中での特徴ある挙動を生かして、材料の欠陥の研究や医療診断での PET (陽電子放射断層撮影) で用いられている。

I-1-7. X 線

X 線は人工的に作られる電磁波の放射線である。図のように、真空管中にフィラメントを置き、電圧をかけて過熱すると、フィラメント表面から熱電子が放出される。



フィラメント間とターゲットとなる物質の間に加速電圧 V をかけると、電子は

$$K_e = eV$$

の運動エネルギーでターゲット物質の表面に入射する。このとき、ターゲット表面からは電子と X 線が放出される。このうち、X 線は連続 X 線と特性 X 線に分けられる。

連続 X 線 (あるいは白色 X 線) は以下のようなメカニズムで発生する。物質中に入射した電子は、物質を構成する原子と相互作用するわけであるが、その作用の一つとして、入射電子と原子核の静電引力がある。このため、入射電子は、原子核に近づくにつれて元の軌跡からずれて曲がった軌道を描くようになる。このように、運動している荷電粒子がその軌道を曲げるときには、進行方向に失った運動エネルギーに比例して、エネルギー

一が電磁波の形で放出される。入射電子が失う最大のエネルギーは最初にもっていた運動エネルギーである。また、原子核から離れたところでは、電場の影響が無視でき、軌道や運動エネルギーは変化しないとみなせる。よって、連続 X 線のエネルギーは

$$E = 0 \sim K_e$$

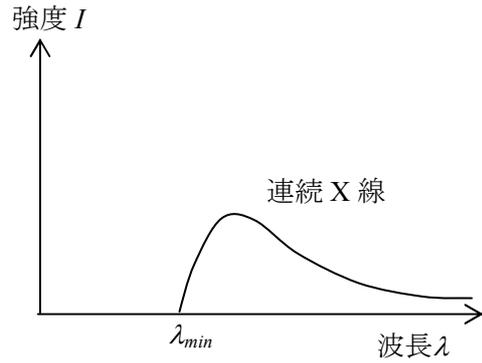
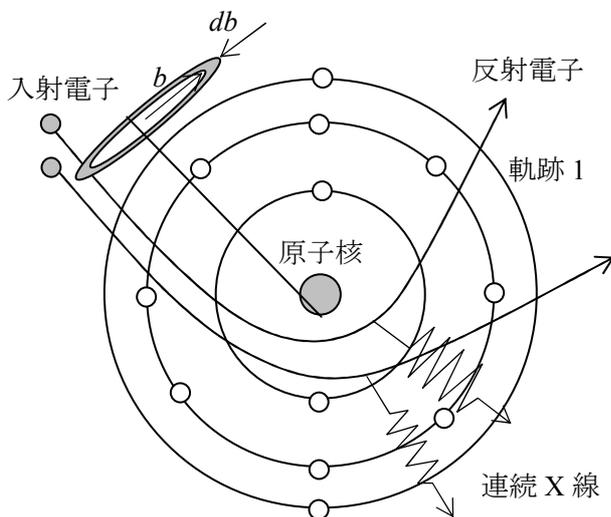
となる。ここで、 $E = h\nu = hc/\lambda$ より、連続 X 線の最大エネルギーに相当する波長は、

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{K_e} = \frac{hc}{eV} = \frac{1.24 \times 10^{-5}}{V} [\text{m}]$$

となる(ただし加速電圧 V の単位は V (ボルト))。

連続 X 線のスペクトルを考えるには電磁気学と量子力学の知識が必要であるが、ここでは考え方の概略を述べる。下の図のように、衝突パラメータ b を定義すると、軌跡 1 をたどる電子の割合は、 $2\pi b db$ の微小断面積に入ってくる割合となる。 b が小さいほど、入射電子は原子核に近づくことになるので、高いエネルギーの X 線が発生するが、 $2\pi b db$ の断面積が減少していくので入射粒子の割合が減少する。結果として、高エネルギーの X 線の強度が減少する。一方、衝突パラメータ b が大きくなると $2\pi b db$ の断面積は増えるが、入射電子は原子核から遠ざかるので、入射電子と原子核の相互作用の大きさが減少するとともに低いエネルギーの X 線が発生することになる。

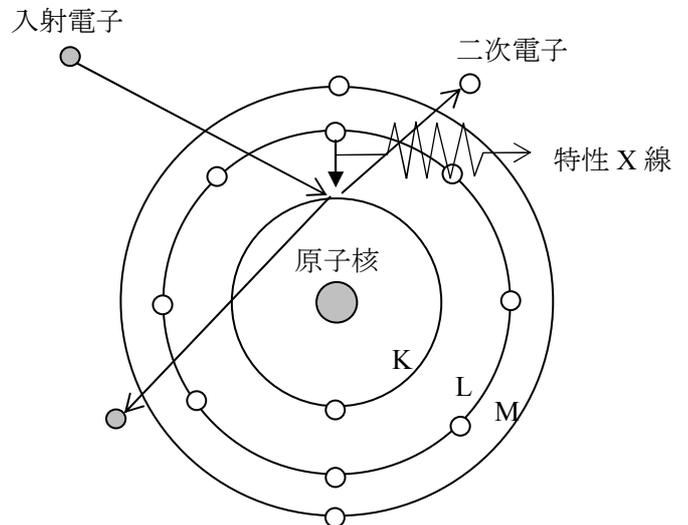
このようなことから、下図の模式図に示すように、連続 X 線のスペクトルは、臨界波長 λ_{\min} から強度が波長の増加とともに増していき、あるところでピークを得て、その後は減少する。このように放射線と物質の相互作用を考える場合には、その相互作用が起こる断面積を考慮しなければならない。



特性 X 線は以下のようなメカニズムで発生する。下図のように、入射電子が物質の構成原子との相互作用には、軌道電子と衝突してこれをたたき出す過程がある。叩き出された軌道電子のうち物質表面から出てくるものを二次電子 (secondary electron) と呼ぶ。このように軌道電子をたたき出すには、入射電子は軌道電子と原子核との結合エネルギー以上のエネルギーを有していなければならない。よって、軌道電子のエネルギー準位を E_i とすると、たたき出しの起こる臨界電圧 V_c は、

$$eV_c = -E_i$$

となる。ここで $i = 1, 2, 3 \dots$ はそれぞれ電子軌道の K、L、M... 殻に相当する。入射電子の加速電圧が臨界電圧以上であれば、軌道電子のたたき出しが生じる。これにより、叩き出された軌道には電子の空位が生じ、原子はエネルギー的に不安定になる。このため、より高いエネルギー準位にある軌道電子がこの空位に落ち込んでより安定になる。この際、エネルギー準位の差に比例するエネルギーが電磁波、すなわち X 線として放出される。よって i 番目の軌道に生じた空位に j 番目の軌道から電子が落ち込む際に放出される X 線のエネルギー



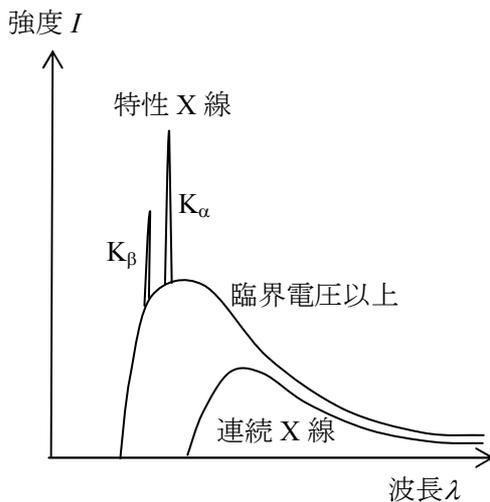
ギーは、

$$h\nu = E_j - E_i$$

となる（エネルギー準位が正の値で与えられている場合には右辺の符号を逆転すること）。よって、波長も、

$$\lambda = \frac{hc}{E_j - E_i}$$

となる。軌道電子のエネルギー準位は原子固有で飛び飛びの値であり、このようにして発生する X 線のエネルギーや波長は連続的ではない。下図のように、一定波長のところで鋭いピークが現れる。これを特性 X 線（あるいは固有 X 線という場合がある）と呼ぶ。特に、K 殻の軌道電子がたたき出されて、L 殻の軌道電子が落ち込む際に放出される特性 X 線のことを K_α 線という。より高い M 殻から軌道電子が落ち込む際に放出される特性 X 線を K_β 線という。



II. 放射性物質と崩壊の法則

II-1. 放射性物質と放射能

これまで述べてきたように、天然、あるいは人工的に作られた原子核が不安定な場合、 α 線（ ^4He 原子核）、 β 線（電子、陽電子）あるいは γ 線（電磁波）を放出して崩壊する（これを放射崩壊あるいは放射壊変という）。放出された α 線、 β 線、 γ 線のことを放射線と言う。また、原子核が放射線を放出して崩壊する性質のことを、放射能という。後に述べるように、放射能は単位時間当たりどれだけ放射崩壊が起こるかを表す放射能の強さを表す場合もある。

核種は、以下に述べるように放射能があるかな

いかによって区別される。

放射性核種、放射性同位体；放射能を示す核種。（放射性同位元素、ラジオアイソトープ、あるいは R I ともいう）

安定核種、安定同位体；放射能を示さない安定な核種。

例) 天然カリウム K (原子番号 19)

^{39}K 存在度 93.2581% 安定

^{40}K 存在度 0.0117% 放射性

(β 壊変あるいは EC 壊変)

^{41}K 存在度 6.7302% 安定

放射性物質とは、放射性核種を含む物質のことをいう。実用的には、国々で決めた放射線関係法規で、放射性物質と定義する放射性核種の量や濃度の限度を設けており、限度未満の場合にのみ、許可なしに取り扱える。

密封放射性物質；固体容器に封入されているか、固体中に固定されているため、通常の扱いでは放射性物質が漏れることはない。（密封 R I、密封線源ともいう）

非密封放射性同位元素；上記の密封の条件を満たしていないもの
(非密封 R I、非密封線源とも言う)

II-2. 放射崩壊の法則

今、親核種 X の 1 個の原子核が娘核種 Y に崩壊する単位時間当たりの確率を λ とすると、微小時間 dt 間に崩壊する確率は λdt となる。従って、時間 t において親核種が N 個存在する場合、次の微小時間 dt 間に崩壊する数は $N \times \lambda dt$ である。一方、親核種はこの数だけ減少したことになるから、親核種の減少数として

$$dN = -\lambda N dt$$

を得る。ここで、 λ は壊変定数（または崩壊定数）と呼ばれる、親核種 X の壊変固有の定数である。よって、単位時間あたりの X の崩壊の割合は、以下の式で与えられる。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

時刻 $t = 0$ のとき、X の個数が N_0 個であったら、時刻 t における X の個数は、

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

となる。

半減期は放射性核種の数が最初の 1/2 になるまでの時間と定義される。よって、親核種の半減期を T とすると、

$$\frac{1}{2} = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T}$$

従って、

$$T = \ln(2) / \lambda \approx 0.693 / \lambda$$

である。半減期も親核種に固有の値である。

放射能の強さは、単位時間あたりに崩壊する原子核の数で定義される。放射崩壊が放射線の発生を伴う場合には、単位時間あたりに発生する放射線の強度とみなせる。親核種の時刻 t における放射能の強さを A とすると、

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0.693N}{T}$$

となる。このことより、同じ数の放射性核種があった場合には、放射能の強さは、崩壊定数が大きい、あるいは半減期が短い核種ほど大きいことがわかる。放射能の強さの単位は、Bq (ベクレル) であり、

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ dps}$$

ここで、1 dps (decays per second) は 1 秒(s)あたりに 1 ケ壊変が起こることを示す。また従来から、Ci (キュリー) という単位も使われてきたが、これは

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

と換算される。

II-3. 放射線の単位

放射線が、物質 1 kg 中に 1 J のエネルギーが吸収されたとき、これを 1 Gy (グレイ) という。また、このような線量のことを吸収線量という。

放射線が生体に照射されると、さまざまな放射線障害を生じる。このような放射線の生物学的効果は、放射線の種類・エネルギーや、被曝した組織および生じる障害によって異なってくる。吸収線量に対し、このような放射線の種類や障害の重み係数を取り入れた線量を等価線量という。等価線量の単位は、Sv (シーベルト) である。

III. 放射線の計測

α 線、 β 線のような荷電粒子や γ 線、X 線のような電磁波の放射線は、物質中に入射すると、物質を構成する原子や分子を電離あるいは励起する性質がある。このため、こうした放射線を電離放射線ということがある。このような電離や励起

を通じて、物質内には物理、化学、光学的な性質の変化がもたらされる。これらを利用して放射線の量やエネルギーを測定することが可能である。また、中性子のように電荷を持たない場合でも、中性子と原子核が衝突することにより、叩き出された原子核が荷電粒子として振舞うため、電離作用が発生するため、これを利用できる。あるいは原子核反応によって荷電粒子を発生させた後、これの電離作用を利用する場合もある。

III-1. 電離箱・GM サーベイメータの原理

放射線は、気体中を通過する際に、気体分子・原子を電離し、正イオンと負の電荷を有する電子の対を形成する。電離に要するエネルギーは、気体分子・原子の種類によらず、ほぼ一定で、数 10 eV である (空気の場合、35 eV)。したがって、4 MeV のエネルギーを持つ α 粒子が、空気中が停止するまでに、イオン・電子対を約 10^5 個生成する。イオン対のうち電子を集めるような仕組みの電極を設けた装置を用いると、電流として検知できることになる。

ところで、1 A という電流は、 6.3×10^{18} 個の電子を集めて得られる電流であり、上記のように、放射線の電離作用で生じる電荷の数は、 10^{14} 分の 1 ときわめて小さいことがわかる。このため、放射線の電離作用で得られる電気信号は、増幅しなければならない。ひとつの方法は、オームの法則 $V = iR$ (V : 電圧、 i : 電流、 R : 抵抗) より、測定回路の抵抗を大きくし、微小電流でも得られるパルス電圧を増幅することである。たとえば、10 k Ω の抵抗を、測定回路に用いたとすると、4 MeV のアルファ粒子の電離作用で生じる電圧は、 10^4 倍増幅される (図 1)。

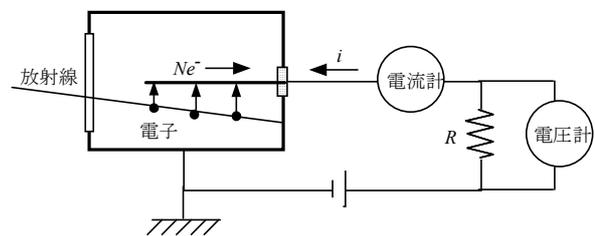


図 1 電離箱の原理

もうひとつの方法は、電極間にかかる電圧を大きくし、最初の気体電離で生じた電子を加速して陽極に集める際に、他の気体分子に衝突させて電離・励起作用を起こすことで、さらに電子の数を増すことである。このような現象を電子なだれというが、電極間にかかる電圧が大きいほど、電子なだれによって生じる電子の数が増加する。しか

し、ある一定の電圧になると、増幅された電子の数は飽和する（図2）。

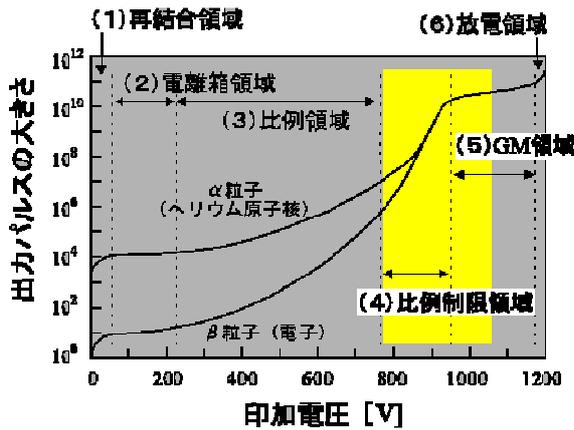


図2 電離方式における電圧・電流

電流の飽和が起こるのは、図3に示すように、電極を構成するチャンバー内で、気体分子の励起により放出された光が、他の気体分子やチャンバーの壁にぶつかって、電子を生成し、電子なだれを引き起こすからである。GM サーベイメータでは、このように電極間に高電圧を負荷し、チャンバー内に生じる電子なだれを飽和させる。このことにより、電子の個数は 10^9 倍程度に増幅できる。

さて、陽極の電圧を V とすると、電子の速度は、 $v_e = (2eV/m_e)^{1/2}$ となる。一方、正に帯電した気体原子（分子）陽イオンの質量を M_g 、速度を v_g とすると、 $v_g = (2eV/M_g)^{1/2}$ である。 $M_g \gg m_e$ であるから、気体原子（分子）陽イオンの速度は、電子に比べて非常に遅い。このため、陽イオンのさやが陽極芯の周りに形成される。この陽イオンのさやが消滅するまでは、次に入射する放射線のカウントができない。この待ち時間を不感時間という。

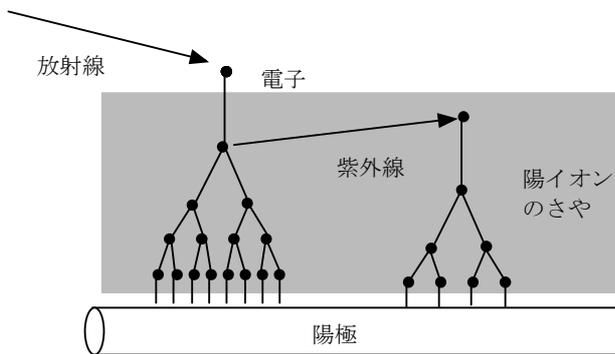


図3 電子なだれ

III-2. シンチレーションサーベイメータの原理

放射線との相互作用により、あるいは光や電場によって、原子や分子が励起され、より安定な状態に戻るときに、そのエネルギー差に相当する光を

放出する。これを蛍光、あるいはルミネッセンスという。光子の数を測定することにより、放射線の計測を行うことができる。

無機物である絶縁体のルミネッセンスは、一般に固体中に含まれる不純物の役割が大きい。例えば、アルカリハライド化合物中に含まれるタリウムイオン Tl^+ は、励起されて基底状態に戻るときに、蛍光を発する。

アントラセンのような有機物の場合には、分子内の励起エネルギー準位から基底状態に戻る際に、ルミネッセンスが現れる。

シンチレーションカウンターは通常、蛍光体と、蛍光体から発生した光子を電子として増倍する光電子増倍管を組み合わせたセットとなっている（図4）。放射線の入射で蛍光体から発生した光子は、光電面（光陰極）に達して電子を発生し、これを加速して、第1段の電極（ダイノード）にたたきつけると、電極表面から数ケの電子が放出される。第1段のダイノードから放出された電子は、さらに第1段と第2段のダイノードとの間にかけて電圧（100～200 V）により、第2段のダイノード表面に叩きつけられて、電子の数は増倍する。今、一つのダイノードで増倍する電子の数を5個とすると、10段のダイノードがある場合、 $5^{10} \approx 10^7$ 個の電子が形成される。この増幅された電流をパルスとして計測すると、入射放射線の計数とエネルギー分析が行える。

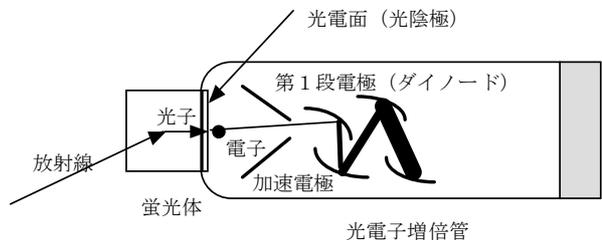


図4 光電子増倍管

III-3. 半導体検出器

ゲルマニウム Ge やシリコン Si のような半導体では、原子は共有結合している。共有結合電子は価電子帯と呼ばれるエネルギー準位にあり、絶対 0 K では電気の伝導に預らない。よってこのときには絶縁体的な性質を示す。

温度が上がったり、放射線の入射といった何らかの原因により、電子が伝導帯に押し上げられると、これは金属中の自由電子のように負の電荷をもって容易に移動できる。すなわち、電気伝導が生じ金属的になる。この時、価電子帯には正の電荷をもつ正孔が形成され、これも電荷担体となる

(図 5 a)。電圧をかけた場合には、伝導電子が陽極に移動し、正孔が陰極に移動する。

放射線による気体の電離に要するエネルギーが ~ 35 eVであったのに対し、半導体の電子・正孔対の形成エネルギーは Ge で 3.0 eV、Si で 3.5eV と小さい。また、固体の密度は大きく、従って γ 線のように電離能が小さい放射線でも、感度よく測定できる。このようなことより、半導体検出器は、エネルギー分解能が高い測定器となる。

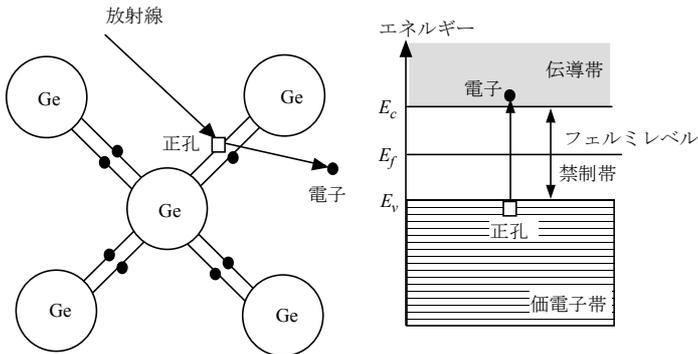


図 5 a 半導体と放射線の相互作用

半導体検出器では、放射線が通過する領域をできるだけ大きくして、より安定で測定効率をあげることが望まれる。このための一つの方法として、p 型半導体 (III 価の不純物を微量添加し、正孔の数を増やしたもの) と n 型半導体 (V 価の不純物を微量添加して伝導電子の数を増やしたもの) を接合した pn 接合半導体 (ダイオード) が用いられる。図 5 b のように、pn 接合半導体では、接合界面近傍の正孔と電子が再結合してできる空乏層 (あるいは欠乏層) ができる。このため、空乏層において、p 型側では、接合前は正電荷の正孔と負に帯電した不純物原子 (アクセプター) との電荷数の中性条件が破れ、正電荷が不足して負の電位となる。逆に n 型では、接合前には負電荷の電子と正電荷の不純物原子 (ドナー) の電荷数の中性条件が破れ、負電荷が不足して正の電位となる。このため、n 型の自由電子が p 型に流れるためには、この電位差を乗り越えていかなければならない。

さらに、図 5 c のように、外部電圧を付加し、p 型と n 型をそれぞれ陰極、陽極とすると (これを逆バイアスという)、陰極から供給される電子と p 型の正孔が再結合し、さらに正孔の数が不足する。また、n 型では陽極から供給される正孔と電子が再結合し、さらに電子が不足する。このため欠乏層間で電位差が高くなるとともに、両者の不足を埋めるため空乏層の幅が広がる。このように電

位差が大きくなり幅も広がった空乏層中に放射線が入射して電子・正孔対が形成されると、これらは欠乏層の平衡を破るため、それぞれ陽極、陰極の方に流れることになる。

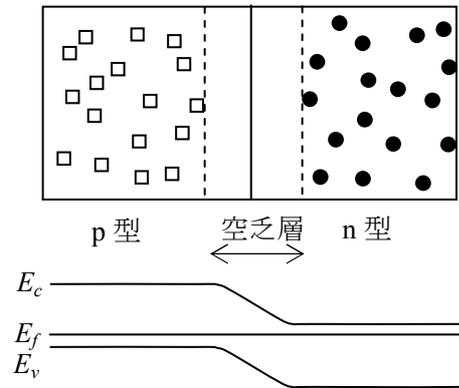


図 5 b pn 接合

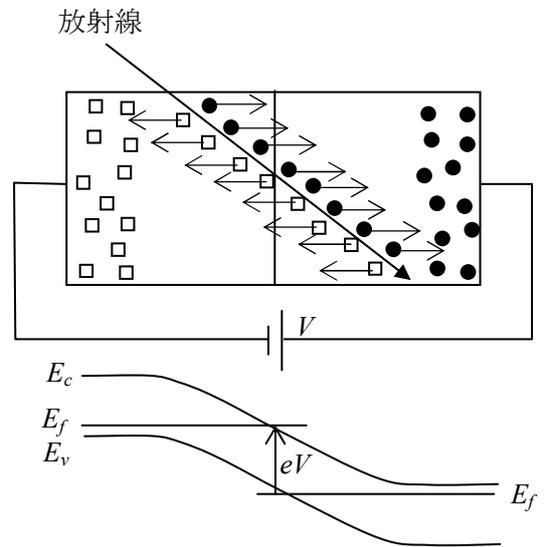


図 5 c 逆バイアスを印加した pn 接合半導体への放射線の入射

III-4. その他の測定法

黑白写真の乳剤は AgCl が用いられる。放射線が乳剤を通ると、 Ag^+ イオンが Ag となり、金属として乳剤中に析出して黒化する。すなわち、黑白フィルムを光に当てたときと同じことが起こる。

放射線の強度が強い場合には、物質中に吸収されるエネルギーが熱として変わることを利用して、温度上昇より放射線の強度を測定することが可能である。

IV. 放射崩壊や計測における統計

放射性核種の崩壊は確率的な現象である。例えば、半減期が1分であるような放射性核種の原子核が1個ある場合を考えてみる。1分間待って崩壊する確率は1/2であるが、実際には、崩壊するかしないかのいずれかである。崩壊しなければ次の1分をまつことになるが、それでも崩壊するかどうかはわからない。しかし、原子核が非常に沢山あると、約半数が1分以内に崩壊するであろうことが推察される。同様に、放射線を計測する場合にも、一個の放射性核種の原子核からどの方向に放射線が飛び出てくるかわからない。たまたま計測装置に放射線が入射すれば一個の放射線を測定でき、入らなければ測定値は0である。これもまた、放射線源として非常に多数の原子核があれば、あらゆる方向に一樣に放射線が出ているとみなすことができる。

このように、放射性核種の崩壊や放射線の計測は確率的な現象として統計的な処理を有する考え方が必要となってくる。上に述べたように、測定値が小さいかあるいは小さいと予想される場合には、なおさら統計処理の重要性がましてくる。

IV-1. 二項分布

今、1個についてある現象が起こる確率を p とすると、それが起こらない確率は $q=1-p$ である。 N 個の中で指定された k 個がこの現象を起こす確率は $p^k q^{N-k}$ であるが、 k 個が N 個のうちどれであってもよい場合には、 N 個の中から k 個を選び出す場合の数をかけて

$$P(k) = {}_k C_N p^k q^{N-k}$$

で表される。期待値は、

$$M = \sum_{k=0}^N kP(k) = \sum_{k=0}^N n_k C_N p^k q^{N-k}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} & k {}_k C_N p^k q^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=1}^N \frac{(N-1)!}{(k-1)! \{(N-1)-(k-1)\}!} \\ & \quad \times p^{k-1} q^{\{N-1-(k-1)\}} \\ &= Np \end{aligned}$$

なので、期待値として、

$$M = Np$$

を得る。

次に分散 V を考えてみると、分散の定義より、

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=0}^N (k-m)^2 P(k) = \sum_{k=0}^N (k^2 - 2mk + m^2) P(k) \\ &= \sum_{k=0}^N \{k(k-1) - (2m-1)k + m^2\} P(k) \\ &= \sum_{k=0}^N k(k-1)P(k) - (2m-1) \sum_{k=0}^N kP(k) + m^2 \sum_{k=0}^N P(k) \\ &= N(N-1)p^2 \sum_{k=0}^N \frac{(N-2)!}{(k-2)! \{N-2-(k-2)\}!} p^{k-2} q^{N-2-(k-2)} \\ & \quad - 2N^2 p^2 + Np + N^2 p^2 \\ &= Np(1-p) \end{aligned}$$

となり、

$$V = Npq$$

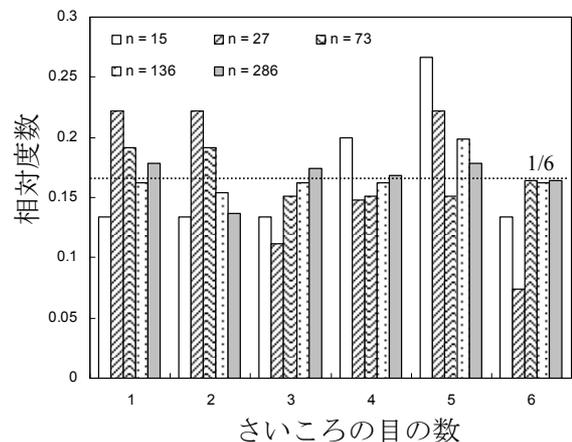
を得る。これより、標準偏差は、

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{Npq}$$

である。

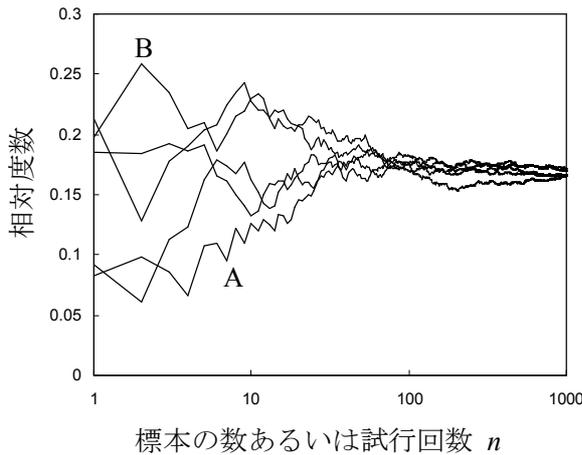
ポアソン分布と正規分布がいずれも、二項分布であることは以下に証明される。しかし、考えておかねばならないことがある。それは、ポアソン分布、正規分布のいずれも非常に大きな数 N の母集団をもっていることを前提にしている。一方、我々が計測に用いる標本の数 n はこれよりもはるかに小さいこともあるために、母集団の確率現象を標本が必ずしも満足しないこともあることである。従って、以下の計算は、もしも計測する標本の大きさが十分に大きく、母集団の確率現象に近い挙動を示すならば、同じような確率現象として母集団に適用できるという仮定を用いていることに注意しなければならない。

今、さいころを振る試行を想定してみる。それぞれの目が出る確率は1/6である。下図は、さいころを $n=15, 27, 73, 136, 286$ 回だけ振ったときに、それぞれの目が出てきた回数(度数)を振った総回数で割った相対度数分布のグラフ(ヒストグラム)である。度数は乱数関数を使ってシミ



ュレートしている。このグラフから、試行回数が少ないと理想的な確率 1/6 からずれた度数分布になることがわかる。

では、正確な値を求めるためには、どれくらいの標本の数あるいは試行回数 n が必要であろうか？ 下図は、5人の学生が研究で理想的には確率 1/6 となる現象の測定実験を行い、相対度数を求めたものとして、乱数を用いてシミュレートしたものである。学生 A は、回数が増えるに連れて 100 回まで相対度数が増加していくことを観察する。学生 B は、回数が増えるに連れて 100 回まで相対度数が減少していくことを観察する。A と B がこうした傾向が出ている 100 回以内で実験を終わってしまうとまったく逆の現象を述べることになる。他の 3 人はこれとは異なった相対度数の変化を観察することになる。しかし、100 回以上の実験を行うと、5 人とも大体同じような相対度数を得て、理想的確率である 1/6 に近い値を報告するであろう。従って、数学的に出せる確率や平均は $N \rightarrow \infty$ とみなせるように母集団のデータ数が非常に大きい場合を指す。



IV-2. ポアソン分布

確率 p が非常に小さく $q = 1$ とみなせる場合には、期待値と標準偏差はそれぞれ、

$$M = Np$$

$$\sigma = \sqrt{Np} = \sqrt{M}$$

となる。次に、確率関数 $P(k)$ がどのようなかを考えてみる。

N が非常に大きな数の場合には、

$$N! \approx N^N e^{-N}$$

で表される Stirling の近似式がある。同様に、 $N-k$ も非常に大きな数だから、

$$(N-k)! \approx (N-k)^{N-k} e^{-N+k}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k} \\ &\approx \frac{N^N e^{-N}}{k!(N-k)^{N-k} e^{-N+k}} p^k q^{N-k} \\ &= \frac{N^{N-k} e^{-k}}{k!(N-k)^{N-k}} (Np)^k q^{N-k} \\ &= \frac{N^{N-k} e^{-k}}{k!(N-k)^{N-k}} M^k q^{N-k} \end{aligned}$$

を得る。ここでさらに $N \gg k$ であることに注意して、

$$\frac{N^{N-k}}{(N-k)^{N-k}} \approx \frac{N^N}{(N-k)^N} = \frac{1}{(1-k/N)^N} \approx e^k$$

を得る。ここでネピアの数 e の定義より、 N が十分に大きいときには $(1+x/N)^N \approx e^x$ を用いた。また、同様に q^{N-k} についても、

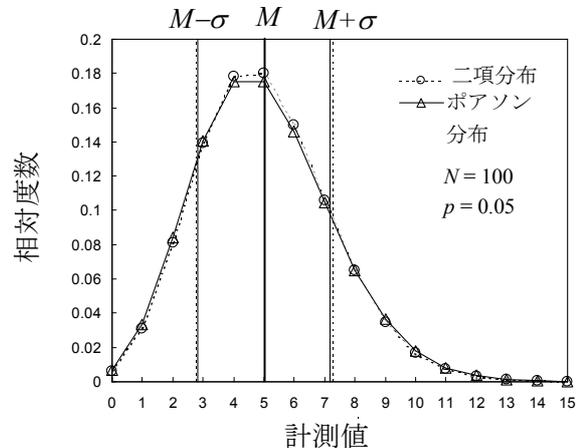
$$\begin{aligned} q^{N-k} &\approx q^N \\ &= (1-p)^N = (1-M/N)^N \\ &\approx e^{-M} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$P(k) \approx \frac{M^k}{k!} e^{-M}$$

と表すことができる。これをポアソン分布という。

下の図は、度数分布 (ヒストグラム) において、 $N = 100$ 、 $p = 0.05$ として二項分布 (点線) とポアソン分布 (実線) を相対度数を比較したものである。この図から、二項分布とポアソン分布には大きな差がなく、二項分布の標準偏差 (実線) とポアソン分布の標準偏差 (点線) もほぼ等しいことがわかる。



IV-3. 正規分布

二項分布

$$P(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k}$$

の対数をとると

$$\ln P(k) = \ln N! - \ln k! - \ln(N-k)! \\ -k \ln p - (N-k) \ln q$$

となる。再び大きな数 n の階乗に対する Stirling の公式を用いるが、より小さな数までよい近似ができる

$$\ln n! \approx \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n$$

を用いる。これより、

$$\begin{aligned} \ln P(k) &\approx \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k + k \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \left(N - k + \frac{1}{2}\right) \ln(N - k) + N - k \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N \\ &\quad - \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - \left(N - k + \frac{1}{2}\right) \ln(N - k) \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \end{aligned}$$

を得る。 $N, k, N - k \gg 1/2$ であることから、この式を整理すると、

$$\begin{aligned} \ln P(k) &\approx -\frac{1}{2} \ln 2\pi + N \ln N \\ &\quad - k \ln k - (N - k) \ln(N - k) \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi + N \ln N \\ &\quad - k \ln N - k \ln \frac{k}{N} \\ &\quad - (N - k) \ln N - (N - k) \ln \left(1 - \frac{k}{N}\right) \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi - N \frac{k}{N} \ln \frac{k}{N} \\ &\quad - N \left(1 - \frac{k}{N}\right) \ln \left(1 - \frac{k}{N}\right) \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \end{aligned}$$

さらに、 $x = k/N$ とおいて、 $x = p$ の周りに2次の項までテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} x \ln x &= x \ln x \Big|_{x=p} + (\ln x + 1) \Big|_{x=p} (x - p) \\ &\quad + \frac{1}{2x} \Big|_{x=p} (x - p)^2 \\ &= p \ln p + (\ln p + 1)(x - p) + \frac{(x - p)^2}{2p} \\ (1 - x) \ln(1 - x) &= (1 - x) \ln(1 - x) \Big|_{x=1} + (-\ln(1 - x) - 1) \Big|_{x=1} (x - p) \\ &\quad + \frac{1}{2(1 - x)} \Big|_{x=1} (x - p)^2 \\ &= (1 - p) \ln(1 - p) - \{\ln(1 - p) - 1\} (x - p) \\ &\quad + \frac{(x - p)^2}{2(1 - p)} \\ &= q \ln q - (\ln q - 1)(x - p) \\ &\quad + \frac{(x - p)^2}{2q} \end{aligned}$$

より、 $M = Np$ に注意して

$$\begin{aligned} \ln P(k) &\approx -\frac{1}{2} \ln 2\pi \\ &\quad - M \ln p - (k - M) \ln p - \frac{(k - M)^2}{2Np} \\ &\quad - (N - M) \ln q + (k - M) \ln q - \frac{(k - M)^2}{2Nq} \\ &\quad + k \ln p + (N - k) \ln q \end{aligned}$$

さらに上式は、

$$\begin{aligned} \ln P(k) &\approx -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{(p + q)(k - M)^2}{2Npq} \\ &= -\ln \sqrt{2\pi} - \frac{(k - M)^2}{2Npq} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sigma^2 = Npq$ であつたから、

$$P(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(k - M)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

となる。 A は近似計算による補正係数である。この係数は、とりうる k の確率を全て足し合わせたものが1になることから、

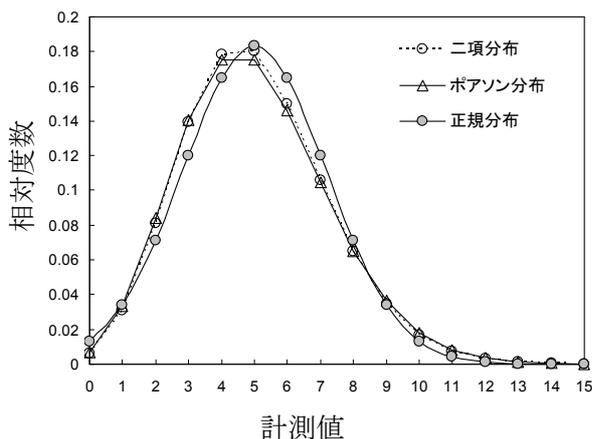
$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(k) dk \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(k - M)^2}{2\sigma^2} \right\} dk \\ &= A\sigma \end{aligned}$$

より、 $A = 1/\sigma$ となる。以上より、

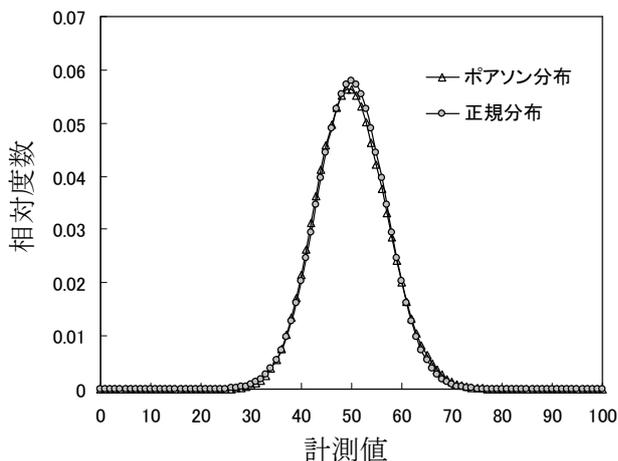
$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(k-M)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

を得る。これを正規分布という。正規分布の確率関数を導出するにあたって、 N が大きいこと以外には制限を加えていない。よって、 N が大きいときには、ポアソン分布も正規分布に近づくことになる。

下の図は、標本の数 $n = 100$ として（これまでの母集団の数 N に対して n で置き換えればよい）、 $p = 0.05$ の場合に計算した二項分布、ポアソン分布、正規分布で予測されるヒストグラムである。いずれもこの標本に対する期待値は $m = np = 5$ である（これまでの母集団に対する期待値 M を置き換える）が、二項分布とポアソン分布が期待値のまわりに非対称な分布を示すのに対して、正規分布は対称的なため、ずれが生じることがわかる。また、正規分布は連続的な分布関数であるのに対して、二項分布とポアソン分布は各点を直線で結んでいるように離散的な分布関数である。



上に示したように、確率が小さく計測値が小さい場合には、正規分布を用いるのは妥当ではなく、用いるべきはポアソン分布である。次に標本数を $n = 1000$ まで増やして、同じ確率 $p = 0.05$ で計算すると、下図のように $m = np = 50$ を中心として

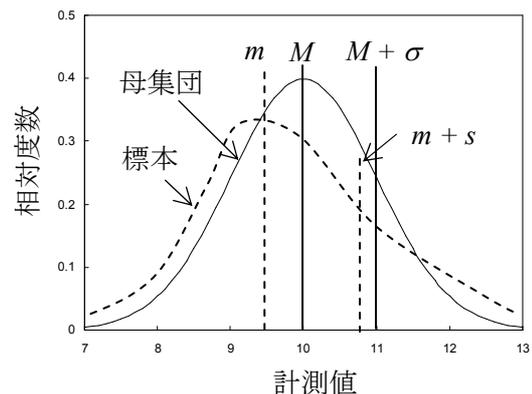
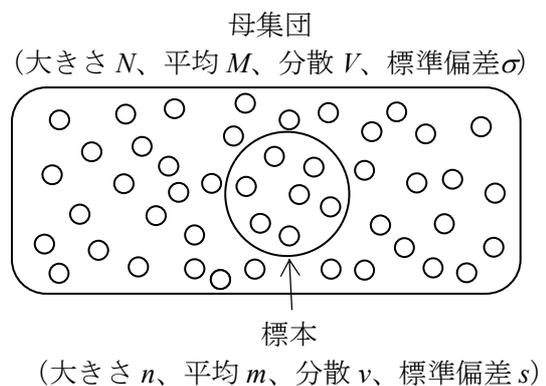


ポアソン分布と正規分布は似たような分布を示し、この場合には正規分布で近似してよい。

IV-4. 実際の計測

(1) 母集団と標本

母集団と標本について再確認しておく。例えば、ある向上で生産される製品の不良品の割合という問題を考えてみる。全製品の統計を取れば正確な値がわかる。一方、ある期間を定めて生産される製品から標本を選び出し、その中から不良品の数を調べて、製品全体に当てはめて推定することもできる。我々が実験で行っている作業はこのような例が多い。標本における割合が製品全体とは一致しないことの方が容易に考えられるが、ある数以上になると母集団の性質が出てくるであろう。こうした意味で、母集団と標本においては、平均値、分散そして標準偏差が異なることが当然考えられる。このようなことから、下の図のように、大きさ（要素の数） N の母集団の平均を M 、分散を V 、標準偏差を σ とし、大きさ n の標本の平均を m 、分散を v 、標準偏差を s で表すことにする。当然のことながら、標本の大きさを大きくしていき、母集団に近づけば、母集団の平均、分散、標準偏差に近づいていく。どうように、標本を複数取ってデータの数をも母集団に近づけていっても、母集団の特性値に近づいていくことは容易にわかる。



n 回の測定を行った際、 k 回目の測定値を x_k とすると、算術平均は

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

で与えられる。次に、残差自乗和を以下のように定義する。

$$A_x = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2$$

なお、残差自乗和は、

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2m \sum_{k=1}^n x_k + m^2 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - nm^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \end{aligned}$$

のように書き直すこともできる。標本の分散（不偏分散）は

$$v_x = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 = \frac{A_x}{n-1}$$

で定義される。これより不偏標準偏差は、

$$s_x = \sqrt{v_x} = \sqrt{\frac{A_x}{n-1}}$$

で与えられる。

これに対し、母集団の分散を見積もる標本分散として、

$$v'_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 = \frac{A_x}{n}$$

ならびにこれで定義される標本標準偏差

$$s'_x = \sqrt{v'_x} = \sqrt{\frac{A_x}{n}}$$

を用いることもある。

n が十分に大きければ、 $n-1 \approx n$ とできるので、

$$v_x \approx v'_x, \quad s_x \approx s'_x$$

とできる。しかし n の値となる測定データ数や測定回数が数個、数回ではこの近似は成り立たない。

ここで注意しなければならないことがある。上の計算は、定義に従って単純に行えるが、実際に測定している値が、単一の同じ性質の現象によるものか、異なる複数の現象によるものかは、計算

のみでは見逃しがちである。また、現象の確率的な性質も見逃しがちになる。このために、度数分布（ヒストグラム）を描くことは、重要である。

もう一つ重要なことは、既にポアソン分布で示したように、測定値が唯一つの場合でも、我々は、

$$m_x \sim x_1, \quad s_x = \sqrt{m_x} \sim \sqrt{x_1}$$

としてみなすことができる。これは、その測定値が母集団の性質を表しているものと仮定しているからである。放射線の測定では一度きりという場合もありえるため、こうした評価が実際に行われることがある。

(2) 異なる現象からの計測値の取扱い

今、二つの異なる現象が計数値を与えているものとする。一つの現象 X が与える値を x_k 、もう一つの現象 Y が与える値を y_k とする。個々の全計測値は $z_k = x_k + y_k$ である。減少全体 Z の算術平均は、

$$\begin{aligned} m_z &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \\ &= m_x + m_y \end{aligned}$$

で与えられる。ここで m_x 、 m_y はそれぞれの現象の平均値である。次に、それぞれの分散を

$$v_x = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2$$

$$v_y = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - m_y)^2$$

とする。これらを用いると全体の分散は

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (z_k - m)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x + y_k - m_y)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 \\ &\quad + \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)(y_k - m_y) \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - m_y)^2 \\ &= v_x + 2v_{xy} + v_y \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 v_{xy} は共分散と呼ばれる量であり、

$$v_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)(y_k - m_y)$$

と定義する。次に相関係数を

$$r = \frac{v_{xy}}{\sqrt{v_x} \sqrt{v_y}}$$

で定義する。

ここで、共分散について考えてみる。

$$\begin{aligned} v_{xy} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)(y_k - m_y) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k y_k - m_y x_k - m_x y_k + m_x m_y) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - m_y \sum_{k=1}^n x_k \right. \\ &\quad \left. - m_x \sum_{k=1}^n y_k + n m_x m_y \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k - m_y n m_x - m_x n m_y + n m_x m_y \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - m_x m_y \right) \end{aligned}$$

と書き直すことができる。

x_k と y_k が互いに独立、すなわち、まったくばらばらな値の場合には、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k = m_x m_y$$

となるので、共分散は $v_{xy} = 0$ となる。よって、相関係数も $r = 0$ となる。この場合の全体の分散は

$$v_z = v_x + v_y$$

である。従って、それぞれの標準偏差を s_x 、 s_y とすると、 $s_x^2 = v_x$ 、 $s_y^2 = v_y$ より、全体の標準偏差は

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

で与えられる。

一方、 x_k と y_k の関係が従属的、すなわち、 y_k が x_k の関数として表すことができる場合には、共分散 v_{xy} は 0 とはならない。従って、

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + 2v_{xy}}$$

としなければならない。 y_k が x_k の関数として表すことができる場合には、相関係数 r は 0 以外の -1 から 1 の間の値を取る。 z_k が x_k の関数としてよく表すことができるほど、 r は 1 もしくは -1 に近い値を示す。

また、計測値が誤差を伴う場合には、平均値に

対して、

$$m_z \pm s_z = m_x + m_y \pm \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

のように標準偏差の大きさも一緒に示すのが普通である。

(3) 正味の計測値

放射性核種の放射線の計測では、必ず自然界からの放射線も同時に測定されるため、自然放射線の測定値を x_k 、全体の測定値 z_k とすると、核種からの放射線の数、

$$x_k = z_k - y_k$$

となる。(2) で行った計算を用いると、核種からの放射線の数平均は

$$m_x = m_z - m_y$$

であり、放射性核種からの放射線と自然放射線はまったく無関係なので、分散は

$$v_x = v_z + v_y$$

であることが容易にわかる。よって、標準偏差は

$$s_x = \sqrt{s_z^2 + s_y^2}$$

となり、放射性核種からの正味の計数値は以下の平均値で表される。

$$m_x \pm s_x = m_z - m_y \pm \sqrt{s_z^2 + s_y^2}$$

平均値の計算において - の符号が出てきても、誤差の伝播は、標準偏差の 2 乗和の合計の平方根となることに注意せよ。

(4) 繰り返し測定の平均値と分散

今、 k 回の測定を行い m_1 の平均値を得たとする。同じ k 回の測定を繰り返し m_2 の平均値を得たとする。同様にして、一連の測定を n 回だけ繰り返したものとしよう。このとき i 番目の一連の測定での j 番目の測定値を x_{ij} 、平均値を m_i とすると、全測定の平均は、すべてのデータを足し合わせた後、総数 nk で割ればよいので、

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned}$$

である。右辺の最後の式は、個々の計測値の平均が、一連の測定で得られた平均値の平均であるこ

とを意味している。平均値の分散は

$$v_m = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n v_i$$

で与えられる。これより、平均値の標準偏差は

$$s_m = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2}$$

となる。

(5) 回帰分析：最小二乗法

n 個の (x_i, y_i) のデータにおいて、二つの測定値 x_i, y_i 間に、関数 f により、

$$y_i \sim f(x_i)$$

の関係が期待されるものとする。無論、 $f(x_i)$ の値は y_i と必ずしも一致しない。このとき残差は

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$$

となる。よって、残差二乗和は、

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - f(x_i)\}^2$$

で与えられる。これはデータのばらつきを表す指標であることは、分散の項で述べた。一方、関数 f は $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ のように、 k 個の未知係数で表されるものとする。 k 個の未知計数を定めるためには、これらの未知係数を変数とし、測定値 x_i, y_i を定数として、 k 個の連立方程式が必要となり、 $k \leq n$ が要求される。もっともらしい未知係数の決定は、残差二乗和が最小になるときの値とする。よって、未知係数 a_j に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n \{y_i - f(x_i)\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -2y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} + 2f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$\sum_{j=1}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

となる a_j の値を求めればよい。

例 1) 直線回帰： $f(x) = a_0 + a_1x$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = x$$

なので連立方程式は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_0} \\ \sum_{j=1}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_1} \end{aligned}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

となる。これらより、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ a_1 &= \frac{-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i + n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{aligned}$$

を得る。 y_i が $f(x_i)$ でよく表すかどうかには、 a_0, a_1 の標準偏差を求めればよい。しかし、先に示した共分散を求め、以下の相関係数の値を調べてもよい。

$$r = \frac{v_{xy}}{\sqrt{v_x} \sqrt{v_y}}$$

r の値が ± 1 よりも大きくずれているときには、相関性がわるい。

例 2) 指数回帰： $f(x) = a_0 e^{a_1 x}$ のとき、 $F(x) = \ln f(x)$

と置きなおすと、 $F(x) = A_0 + a_1 x$ となる。ただし $A_0 = \ln a_0$ である。この変換により、我々は (1) の直線回帰の結果を $\ln y_i$ と x_i に対してそのまま用いることができる。よって、

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ a_1 &= \frac{-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \ln y_i + n \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{aligned}$$

となる。これより $a_0 = e^{A_0}$ で求めればよい。

V. 原子力発電の基礎

V-1. 核分裂

(1) 自己核分裂

I-1-3、I-1-4 節で述べたように、質量数の大きな原子核では、 α 粒子を外に出してより結合エネルギーの大きな安定な原子核になる傾向がある。同様にして、重い原子核では原子核が分裂して質量数の小さな安定な原子核になる確率が存在する。原子番号 92 の ^{238}U は天然に同位体比 99.27% で存在し、半減期 4.47 億年で α 崩壊する。しかし、 ^{238}U は、 α 崩壊の $5.54 \times 10^{-5}\%$ の確率で核分裂をする。これを自己核分裂 (self fission) という。すなわち、非常に小さな確率ではあるが、



のように、 ^{238}U は自己核分裂して、原子核 X と Y が生成される (これらを核分裂生成物、FP、fission product という)。この他に中性子 (n) が f 個生じたり、 γ 線が発生する (これらをそれぞれ即発中性子、即発 γ 線という)。このとき発生するエネルギーはおおよそ $Q = 210 \text{ MeV}$ である。また中性子の発生も必須と思ってよい。例えば ^{238}U が真っ二つに割れて原子番号 46 の Pd になったとする。Pd においてもっとも中性子数が多い安定な同位体は ^{110}Pd であって、これ以上に中性子が多くなると、中性子過剰により原子核は不安定で β 崩壊する。核分裂前の中性子数を半分にわると 119 個なので中性子の数が明らかに余剰である。従って、核分裂時に中性子を放出し、より安定な核分裂生成物になろうとする。

原子力発電では ^{238}U は用いられない。原子力発電でもっぱら用いられるのは ^{235}U であり、天然には 0.72% しか存在しない。 ^{235}U はやはり 0.70 億年という非常に長い半減期で α 崩壊する。 ^{235}U の自己核分裂の確率は α 崩壊の $7 \times 10^{-9}\%$ であり、 ^{238}U に比べて無視しうるほど小さい。では、何故、 ^{235}U が原子力発電の核燃料として用いられるのであろうか？

(2) 核分裂反応

ウランに中性子を照射した場合、



で表される核分裂反応が促進される。発生した中性子を反応に用いれば、上記の核分裂反応は連鎖的に持続する (これを連鎖反応、chain reaction と

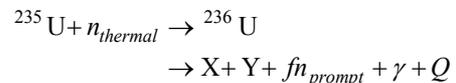
いう)。核分裂で生成される即発中性子のエネルギーは 2 MeV 程度の高エネルギー中性子である。しかし、核分裂をもっとも有効に起こす中性子のエネルギーは室温の熱エネルギー (0.025 eV) 程度であり、これを熱中性子という。 ^{238}U に比べて ^{235}U の方が熱中性子を吸収して核分裂を起こす確率が圧倒的に大きい性質がある。

原子核の半径は $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ であらわされた。中性子は電荷を持っていないため、1 個の中性子が一つの原子核に衝突することができる断面積は、

$$\sigma \approx \pi R^2$$

とまず見積もることができる。ウランの原子核の場合、 ^{235}U 、 ^{238}U のいずれの場合も、1.7 b (1 b = 1 barn = $1 \times 10^{-28} \text{ m}^2$) 程度であって、両者に差はない。衝突の結果、中性子が跳ね返されたり (散乱)、吸収されたり (吸収)、核分裂などの核反応を起こしたりする。 ^{238}U の場合、熱中性子を吸収して核分裂が起こる断面積 (核分裂断面積) は、 $4 \times 10^{-6} \text{ b}$ であって非常に小さい。ところが、 ^{235}U の核分裂断面積は 584 b であり、上で計算した単純な衝突断面積よりもはるかに大きい。

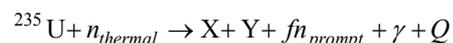
以上のように、核分裂反応を連鎖的に生じるためには、発生した即発中性子 (n_{prompt}) を減速して熱中性子 (n_{thermal}) とし、



を起こさせればよいことになる。運動エネルギーをもった一つの球が静止している他の球に衝突する過程を考えると、その運動エネルギーがもっとも失われるのは、同じ質量の場合である。このことより、即発中性子を減速する材料 (減速材) として、軽水炉では水 (H_2O) が用いられる。水の場合、即発中性子が水と 16 回ほどぶつかると熱中性子になることを二体間衝突の物理の知識を用いれば計算できる。また、水は温度が高くなった核燃料を冷やす冷却材ともなり、伝達された熱を蒸気タービンにまわして発電する熱伝達の媒体でもある。この他に減速材として黒鉛 (炭素) が用いられることがある。高温ガス炉では、黒鉛で減速し、冷却材としてヘリウムガスなどを用いる。

(1) 中性子増倍率

次に、核分裂反応



が持続的に起こる過程を考えてみる。即発中性子の平均の数は $f=2.4$ である。よって、 ^{235}U の核分裂（燃焼）を常に一定に保つためには、発生した即発中性子のうち、一個だけが熱中性子として次の核分裂反応に預かれればよい。即発中性子が減速されて熱中性子になるまでには、中性子は ^{238}U や減速材や冷却材、原子炉の構造材料などの他の物質の原子核に吸収される過程がある。また、原子炉外にもれていく過程がある。また、高エネルギーの中性子は ^{238}U や ^{235}U の核分裂反応を起こすため、中性子の数が増える過程がある。このような過程を経て、即発中性子から熱中性子となり、次の核分裂反応にいたるまでの中性子の生存率を中性子増倍率という。増倍率を k とすると、

$k < 1$: 臨界未満（あるいは未臨界）、次の世代の核分裂までに中性子の数が減っていく。

$k = 1$: 臨界、一定出力の核燃料燃焼を保つ。

$k > 1$: 臨界超過（つぎのあるいは超臨界）、次の世代の核分裂が増加していき、出力が増加する。

のように大別できる。

(4) 即発中性子と遅発中性子

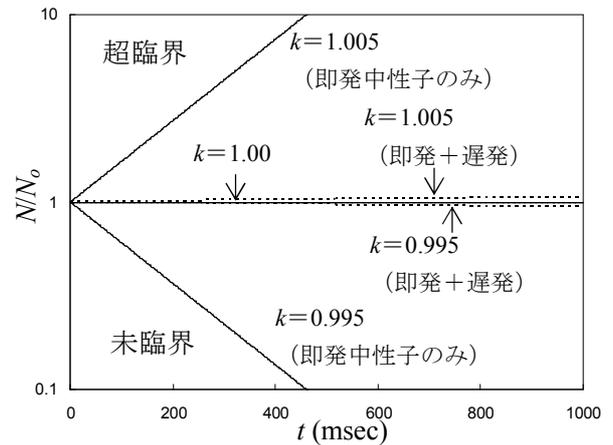
核分裂反応で生じた即発中性子が減速されて次の世代の核分裂反応を起こすまでの時間を τ_{prompt} とすると、 $\tau_{prompt} \approx 10^{-3} \text{ sec}$ である。これより、時刻 t における中性子の数を N とすると、次の dt の微小時間の間に変化する中性子の数は、

$$dN = N(k-1) \frac{dt}{\tau_{prompt}}$$

で表すことができる。 k は各世代間で生き残っている中性子の割合であり、これから 1 を引くのは次の世代で 1 個だけ中性子が使われることによる。これより初期の中性子数を N_0 とすると、時刻 t での個数は

$$N = N_0 \exp \left[\frac{(k-1)t}{\tau_{prompt}} \right]$$

となる。右上の図のように、 $k=1$ の臨界状態では N の数が一定であり、原子炉を定常運転できることがわかる。 $k < 1$ の未臨界状態では中性子の数が減少していくため、核燃料の燃焼を下げていき、原子炉を停止できる。超臨界状態では中性子の数が指数関数的に増えることになる。仮に増倍率を



$k = 1.005$ とすると、1 秒後の中性子数は約 150 倍となる。即発中性子だけでは、増倍率がわずかに 1 を超えると、ごく短時間に出力が上昇してしまうことになる（このように即発中性子による臨界状態を、即発臨界と呼ぶことがある）。

先に述べたように、核分裂生成物は中性子の数が余剰なため、核分裂生成物から中性子が放出される崩壊現象がある。このようにして放出される中性子のことを遅発中性子 (delayed neutron) という。例えば ^{87}Br では半減期 55sec で中性子が放出される。 ^{88}Br 、 ^{136}Te 、 ^{137}I 、 ^{141}Cs では平均の半減期 22sec で中性子が放出される。この他にも遅発中性子を出す核種が生成される。遅発中性子の全中性子数に占める割合は僅か 0.65% であるが、核分裂に用いられるまでの平均時間は $\tau_{delay} = 12.7 \text{ sec}$ と即発中性子よりも圧倒的に長い。

このような遅発中性子による核分裂も取り入れると、核分裂が起こるまでの正味の時間は

$$\tau_R = (1 - 0.0065)\tau_{prompt} + 0.0065\tau_{delay} = 0.084 \text{ sec}$$

となる。上の図中に破線で示したように、遅発中性子による核分裂が取り入れられることにより、中性子の増倍速度は著しく減少し、 $k = 1.005$ のとき 1 秒後で 1.06 倍程度である。このように遅発中性子の関与で核分裂反応の速度が非常に遅くなる。遅発中性子による臨界を遅発臨界と呼ぶことがある。原子炉は遅発臨界で運転制御されている。

(5) 原子炉の構造のあらまし

軽水炉では ^{235}U を 3~5% 間で濃縮した UO_2 ペレットが核燃料として用いられる。純粋な UO_2 の分子量は 270g、密度は 10.96 g/cm^3 、融点は 2845°C である。これらのペレットは、被覆管で覆われた燃料棒につめられている。軽水炉の場合、被覆管はジルカロイと呼ばれるジルコニウム合金でできている。燃料棒は集合体とし、周りに水を流し

て、先に述べた中性子の減速、ならびに燃料棒からの熱を取り去って発電用蒸気タービンへと送る。すなわち水は冷却材と減速材との役目を持ち、エネルギー変換の見地からは発電用熱量を運ぶ担い手である（下図参照）。中性子の数を制御するのは、中性子を吸収する核種であるホウ素 ^{10}B が入れている制御棒（control rod）である。

軽水炉には、加圧水型炉（pressurized water reactor, PWR）と沸騰水型炉（boiling water reactor, BWR）の二つの型があり、日本の商業用軽水炉はこのいずれかである。これらの炉の違いは、伝熱方法に起因するが、その結果原子炉の構造も大きく異なる。

加圧水型炉（PWR、川内原子力発電所ならびに福島先生のテキストを参照のこと）では、原子炉容器内において 325°C で燃料棒を冷やす冷却水を回しているが、その際の圧力は 160 気圧として、液体の状態で燃料棒から熱を受け取っている。これを一次冷却水と言う。このように高い温度に加熱された冷却水を用いて、別系統で回す2次冷却水を沸騰させ、蒸気タービンを回す。2次冷却系では、 55 気圧を用いて、 280°C の蒸気となる。

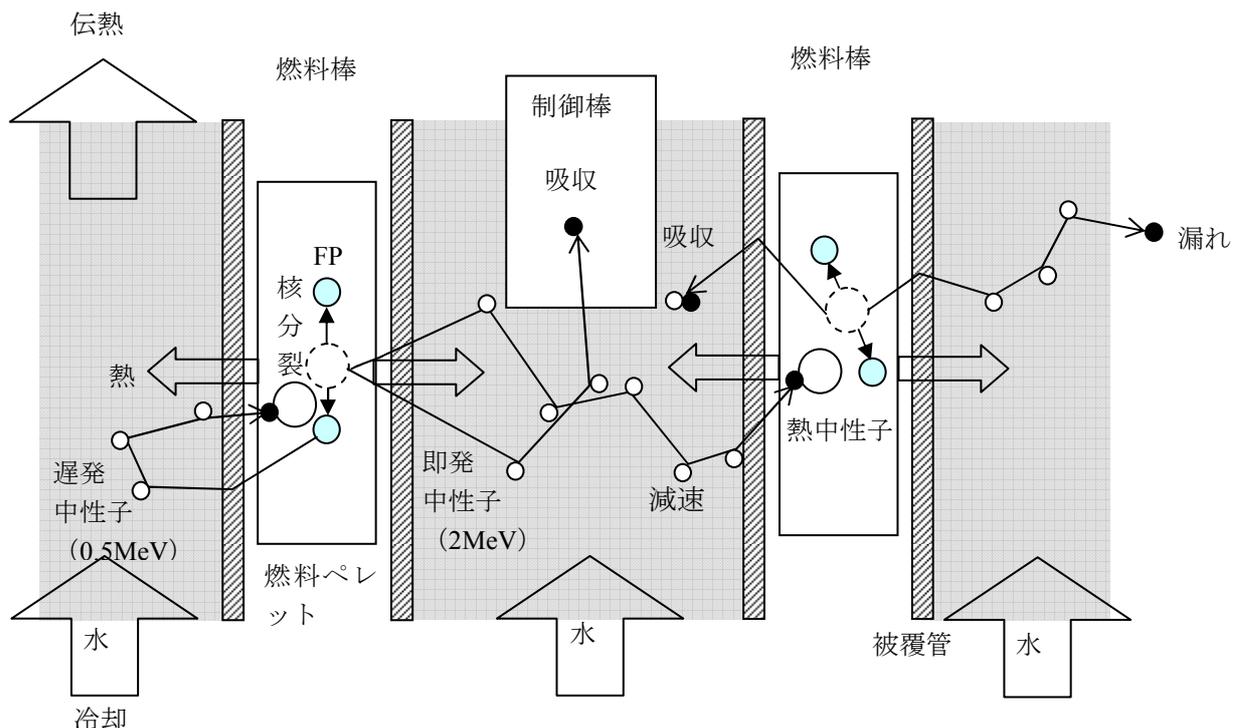
加圧水型炉（PWR）では、右の中図にあるように、加圧した1次冷却水（液相）→2次冷却水を加熱して蒸気→2次冷却水蒸気でタービンを回し発電→復水→2次冷却水蒸気発生となっている。原子炉压力容器を含む1次冷却水周りは放射能漏れを防ぐために独立させ、2次冷却水による発電施設は別建屋となる。また制御棒は上から吊って

動かすことになる。

沸騰水型炉では、 70 気圧の圧力である。炉心では 285°C となって蒸気が発生し、 285°C となって蒸気が発生し、 $12\% \sim 17\%$ 程度の気泡が含まれた液相/気相の流体が冷却材として用いている。このうち蒸気が取り出され、蒸気タービンを回す。沸騰水型炉（BWR）では、原子炉压力容器で発生した蒸気でタービンを回すために発電施設まで一緒に建屋となる。また、制御棒は、蒸気を用いる構造上、下部からの運転となる。さらには、中性子の減速は水中の水素原子の原子核との衝突で生じることを述べたが、水の温度が高くなり気泡が増えると、水素原子の密度が減少して、中性子の減速も減り熱中性子数が減少する。このことから、一つには原子炉の温度が高くなると、自動的に中性子数が減少して核燃料の燃焼率が下がることが言える。逆に、原子炉の温度が下がって気泡の数が減ると、熱中性子の数が増えていき、核燃料の燃焼率が上がる。つまり、沸騰水型では構造そのものが自動制御できるフィードバックシステムである。この性質を利用し、原子炉压力容器に送る水量を調整して、核燃料の燃焼を制御できる。

加圧水型炉の場合にも、冷却水の温度が上がると水の密度が減少するために、中性子の減速効率が落ち、熱中性子数が減少する。

また、いずれの炉においても、燃料ペレットの温度が上昇すると、 ^{238}U による中性子の吸収が大きくなり、核分裂に用いられる中性子の数が減少する。これは次のように理解される。物質の温度



が上がると、原子は熱エネルギー $k_B T$ (k_B はボルツマン定数、 T は温度)を受けて熱振動の振幅が大きくなる。原子核は原子の質量を賄っている重心なので、当然原子核の振動の振幅も大きくなる。このため、温度が上昇すると、 ^{238}U 原子核の中性子の吸収に対する有効断面積が増加することになる。この効果は、燃料ペレットの温度上昇とともに即座に現れてくる。

(6) フェールセーフ (fail safe)

原子炉は、故障や誤動作が起こっても安全側に制御が行われることが設計の基本となっている。このような設計をフェールセーフと呼ぶ。身近な例で言えば、ストーブやヒーターを間違えて倒した際に、火や電源が自動的に止められるようなシステムを言う。

上に述べた燃料ペレットの温度上昇に伴う ^{238}U による中性子吸収や、減速材の密度低下による熱中性子数の低下は、原子炉固有の安全性と言ってもよい。原子炉の制御にとって、中性子増倍率 k あるいはこれを用いて定義される反応度 $\rho = (k - 1)/k$ は重要な因子であるが、増倍率や反応度が増加して、原子炉内の出力が上昇しても、反応度を減少させるような性質を、負の反応度効果という。原子炉の設計においては何よりもまず、負の反応度効果が満たされていなければならない。

原子炉のもつ安全性を越えた故障や誤動作に対しては、各種の計測により安全基準を越えた値になると、緊急炉心停止装置 (ECCS) が作動するようになっている。PWR の場合、停電による制御棒落下システムや、一次冷却水損失等による緊急冷却水注入などがある。

(7) 臨界量 (臨界質量)

これまで述べてきたように、核分裂の定常的な連鎖反応においては、発生した中性子の吸収や漏れにより、実質的に次の世代の核分裂において用いられる中性子数が1個となることが肝要である。逆に言えば、中性子の吸収や漏れが少ないような系に核燃料を置くと、臨界に達しやすくなる。

1999年に、茨城県東海村の核燃料再処理施設の一つであるJCOという会社で、18.8%に ^{235}U を濃縮した溶液を入れた容器で臨界事故が発生した。ウランの量は16.7kgといわれている。この事故は、2.4 kgの量しか入れてはならないとされている容器に、作業の効率化のため一度に16.7 kgを入れたために、原子炉内での臨界状態が発生しており、最初に即発臨界、その後20時間に渡って遅発臨

界が起こったとされている。では、何故2.4 kgでは安全で、16.7 kgでは臨界に達したのだろうか？

前に述べたように、 ^{235}U も ^{238}U も自己核分裂の確率を非常に小さいながらも持っている。例えば、 ^{238}U の α 崩壊の半減期は $T_{1/2} = 4.47 \times 10^9 \text{ y} = 1.4 \times 10^{17} \text{ sec}$ であるので、崩壊定数は $\lambda = 0.693/T_{1/2} = 4.9 \times 10^{-18} / \text{sec}$ である。これは一個の ^{238}U が1秒当りに α 崩壊する確率である。 ^{238}U の自己核分裂が起こる割合は、 α 崩壊に対して $5.54 \times 10^{-5}\%$ の比となるので自己核分裂の確率は、 $2.7 \times 10^{-24} / \text{sec}$ となる。1 molの ^{238}U では 6.02×10^{23} 個の原子核があるので、1秒当たり1.6回の自己核分裂が起こることになる (^{235}U も自己核分裂を起こすが、その確率は ^{238}U よりも非常に小さいので無視してよい)。 ^{238}U の自己核分裂で発生する中性子の数は1.8個であるので、1秒当たり3個の即発中性子が生まれていることになる。

こうして生成された即発中性子は、熱中性子に減速されることなく外界に抜け出ていけば、 ^{235}U の核分裂を起こす確率は無視しうるほどに小さい。しかし、即発中性子が熱中性子になるだけの有効な体積の容器内に、水のように中性子を減速する媒体とともにある一定数以上の ^{235}U の原子核があれば、 ^{235}U の連鎖的な核分裂反応を引き起こすことが考えられる。

核燃料の濃度や形態、減速材や容器の種類によって条件が異なるが、上記の原則に従って、核燃料物質にはある一定の量 (質量) になると臨界に達する。これを臨界量 (あるいは臨界質量) という。

V-2. 核融合

(1) 核融合反応

Weizsackerの質量公式のグラフで見たように、軽い原子核の結合エネルギーは小さく、これらは結合してより安定な原子核になろうとする傾向がある。このようにして低質量数の原子核が結合することを核融合 (nuclear fusion) という。

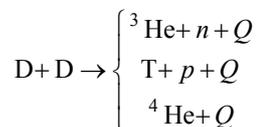
核融合反応には、例えば、以下のようなDT反応がある。



ここで、水素原子核が陽子1個であるに対して、 D は原子核に陽子1個、中性子1個をもつ ${}^2\text{H}$ でありデュートリウム (重水素) と呼ばれる。また T は、原子核に陽子を1個、中性子を2個もつ ${}^3\text{H}$ であり、トリチウム (三重水素) と呼ばれる。これらの質量は下の表に記す。これを用いると、DT

反応では $Q = 17.6$ MeV のエネルギーが放出されることがわかる。そのうち 14.1 MeV が中性子、2.5 MeV が α 粒子のエネルギーとなる。DT 反応は核融合炉を実現するための最も近道の反応といわれており、国際熱核融合実験炉の ITER 計画で利用の予定である。

エネルギー源としての核融合反応には、他にも



などが考えられている (1, 2 番目が 50% くらいずつで、3 番目の反応は無視できるくらい小さい)。

| 核種 | A | Z | N | M (u) |
|-------------------|-----|-----|-----|-----------|
| ${}^1\text{H}$ | 1 | 1 | 0 | 1.0078250 |
| ${}^1\text{n}$ | 1 | 0 | 1 | 1.0086649 |
| ${}^2\text{H(D)}$ | 2 | 1 | 1 | 2.0141018 |
| ${}^3\text{H(T)}$ | 3 | 1 | 2 | 3.0160493 |
| ${}^3\text{He}$ | 3 | 2 | 1 | 3.0160293 |
| ${}^4\text{He}$ | 4 | 2 | 2 | 4.0026033 |

(1) 核融合炉

核融合炉の一つには、D、T を高温に加熱して、原子が陽イオンと電子に分かれたプラズマ状態にし、外部磁場を加えて閉じ込めておく、閉じ込め型炉がある。現在建設が予定されている ITER は、閉じ込め型炉のうちトカマク型と呼ばれている。トカマク炉は、ドーナツ型の真空装置でもあり、超伝導材料を用いてドーナツの円周方向にトロイダル磁場、断面の周方向にポロイダル磁場を掛ける。

同じく、磁場閉じ込め型としてヘリカル炉がある。これはドーナツ型の炉にらせん状に超伝導コイルを巻いて、らせん状の磁場を形成してプラズマを閉じ込めるタイプである。

また、慣性核融合炉としてレーザー核融合炉がある。これは、外側を D、T の固体、内部をこれらの気体とする球状の燃料ペレットに高出力のエネルギーをレーザー照射によって供給し、ごく短時間における燃料の膨張により、高温、高圧を達成して核融合反応を得ようとするものである。

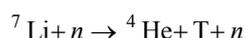
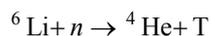
核融合炉はまだ実現していない。プラズマを閉じ込める熱核融合炉では、核融合反応が起こる条件として、自己点火温度以上の加熱と、プラズマの保持が要求される。最も起こりやすいといわれる DT 反応でも、点火温度は 10 keV (おおよそ 1 億度) となり、DD 反応ではその数 10 倍となる。

また、このために要する磁場の大きさ (磁束密度) は、数 10T (テスラ) 以上であり、超伝導コイルが必要となる。このように、核融合反応を持続して行わせるためには、外部からエネルギーの入力が必要であり、核融合反応で生じるエネルギー出力がこれを越えなければ、実用性はない。このため、出力エネルギーと入力エネルギーの比をエネルギー増倍率とし、ITER 計画ではプラズマ閉じ込め時間 400sec 以上、エネルギー増倍率が 10 以上となることを目指している。

核融合炉の成否には、構造材料の問題も大きな因子を占める。核分裂で発生する即発中性子のエネルギーは 2 MeV 程度であったが、DT 反応では 14 MeV の高エネルギー中性子が発生する。中性子は電荷を持たないため、物質中に入射すると、物質を構成する原子の原子核に衝突する。このため、物質中では原子のはじき出しが生じ、結晶の原子の位置に空孔と、弾き飛ばされた原子による格子間原子が形成される。結晶中の原子のはじき出しエネルギーは数 10 eV なので、中性子のエネルギーが高いほど、多くの結晶欠陥が形成される。材料中に欠陥が多量に形成されると、材料の強度が増すとともにもろくなる脆化が起こる (これを照射脆化という)。この他にも、材料の膨れ (スウェリング) が生じたり、14MeV 中性子との原子核反応で生じる誘導放射能が発生する。

また、1 億度のエネルギーをもつプラズマから、粒子や電子がプラズマを閉じ込める壁に入射して、壁の表面にある原子をたたき出したり (スパッタリング)、溶かしたりする。表面から削られた物質がプラズマ中に入ると、プラズマの温度を下げるため、スパッタリングや溶融を避けなければならない。ITER 計画では、構造材料として低放射化ステンレス鋼、プラズマからの粒子などが照射して損耗しやすい壁などの材料に SiC のようなセラミックスやタングステンのような高融点金属の利用が考えられている。

また、トリチウムは β 崩壊をする放射性核種であり、自然界にはないので、DT 反応で生成した中性子により



の反応をブランケットと呼ばれる構造体中で起こし、トリチウム増倍が行われる。ブランケットでは中性子のエネルギーを熱エネルギーに変換し、周辺を取り巻く超伝導コイルやその他の構造部材への中性子の照射を遮蔽する役目も持つ。

VI. 演習の説明

VI-1. GM管の作製

準備した塩化ビニールのパイプを、高圧をかける管として用いる。

(1) 図1に示すように、パイプの内側に陰極となる電極(円筒の紙)を取り付け、リード線を、紙とパイプの間になるようにビニールテープで貼り付ける。

(2) 図2に示すように、陽極を固定する発泡スチロールの台をカッターで切り出し、陽極を通す穴を台の中心に開ける。

(3) リード線を数cmほど剥き、一本の銅線(0.1~0.15mmφ)だけを残して、後はリード線のカバー側に折り曲げてビニールテープで貼る。

(4) 図3に示すように、陰極を取り付けたパイプに、陽極を差し込んだ発泡スチロールを取り付け、ビニールテープで固定する。

(5) 図4に示すように、空いている端の方から、ブタンガス(使い捨てライターのガス)をパイプの中に射出して、ガスが逃げないように急いで、端をラップで覆い、ビニールテープで固定する(図5)。

(6) GM管では数100Vから3000V程度の電圧を掛けて、管内で陽極の先端に放電が起き易いようにする。電源としては、1000Vおよび1500Vまで昇圧できる高圧電源を用いる。

(7) 放射線源の近くに、高電圧を掛けたGM管のラップ窓を近づけると、放射線により放電が生じる。近くにラジオを置いているとこの放電が音として認識できる。

(8) 高電圧印加について:(6)で述べたように、GM管で放電を生じるためには、高電圧が必要である。電源がない場合には、摩擦電気を用いることができる。この際には、

1) 2000V以上(0.005μF)の耐圧フィルムコンデンサー2個を直列につなぎ、電源の代わりに置き換えて、塩ビ棒を摩擦して帯電した電荷を陽極に蓄える。

2) 市販のプラスチックコップを3個用意し、図7のように、アルミ箔をコップの間に挿入して、コンデンサーを作る。これに塩ビ棒を摩擦して帯電させた電荷を触れさせて帯電させ、GM管の陽極とつなぐ。

注意: 手の油は漏電や絶縁の原因になるので、組み立て部はよくアルコールでふき取ること。

注意: 高圧電源を利用する場合には、担当教員の支持に従うこと。

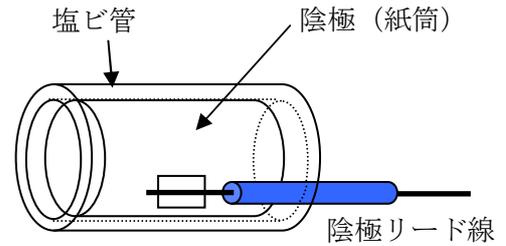


図1

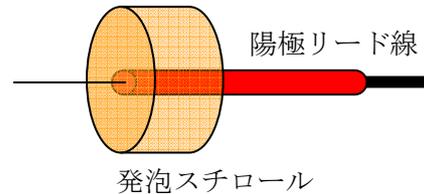


図2

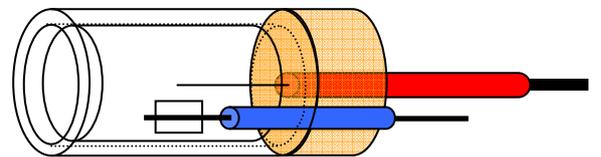
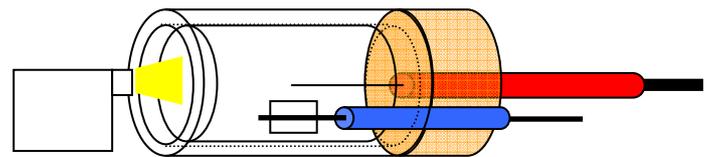
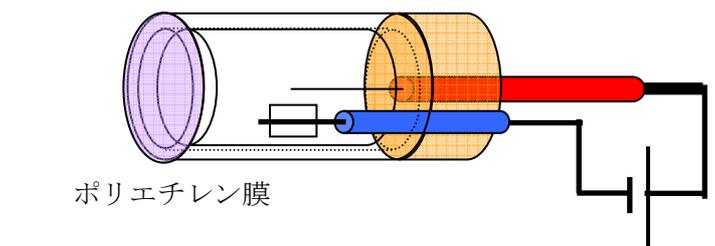


図3



使い捨てライターのガス

図4



ポリエチレン膜

700V~3000V以上

図5

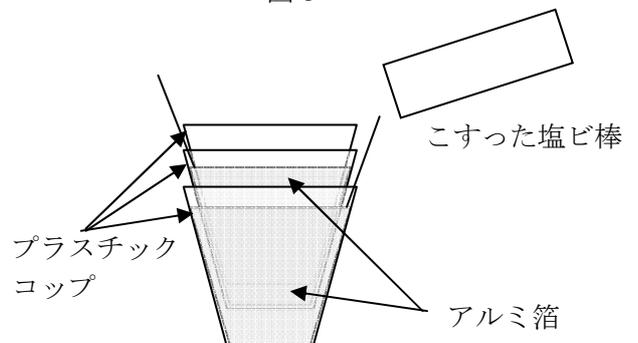


図6

演習問題

- VI-1-1. GM 管の測定原理について説明せよ。
VI-1-2. 放射線の種類やエネルギーによって物質中での透過能力がどのように異なるかを調べ、異なる種類やエネルギー放射線の計測方法を考察してみよ。

VI-2. 環境放射線の測定

放射線計測協会より借りた簡易放射線測定器「はかるくんメモリー」(γ 線用、CsI (TI) シンチレーション型、図7)を用いて、工学部内、郡元地区内の環境放射線を測定し、暮らしの中の放射能に関する知見を得ることを

目的とする。測定するのは単位時間あたりの線量(線量率という)であり、等価線量(Sv)およびカウント数を用いる。



図7

実験方法

- (1) 学内の異なる3つの場所で、はかるくん γ 線用を用いて、空間線量率を測定する。
- (2) 測定は、測定場所一箇所につき、5回行う。1回の測定時間は一分間とする(単位 $\mu\text{Sv/h}$)。
- (3) (3)の測定時に、GM サーベイメータから、一分あたりに発生する音をカウントする(単位 cpm 《counts per minute》)。
- (4) その場所における線量率(はかる君の値ならびにカウントした音の数)の平均ならびに不偏標準偏差を求める。

演習問題

- VI-2-1. 自然界の放射線はどのような原因により、年間でどれくらい発生しているか調べ、年間の自然放射線の空間線量率を $\mu\text{Sv/h}$ に換算して、実験結果と比較せよ。
VI-2-2. 測定場所によって線量率が異なる場合、その原因について推察せよ。
VI-2-3. シンチレーション型検出器と半導体検出器の違いを述べよ。

VI-3. 材料の放射線測定

本実験は、天然にある放射性物質から放出される放射線の線量を測定し、暮らしの中の放射能に関

する知見を得ることを目的とする。放射線計測器には、(財団法人)放射線計測協会より借りた簡易放射線測定器「はかるくん2」(β 線用、Si 半導体検出器)を用いる。

実験方法

- (1) 演習室におけるバックグラウンドの自然放射線の1分間あたりの線量率($\mu\text{Sv/h}$)を測定する。測定回数は5回とする。
- (2) 与えられた物質のごく表面で、放射線の1分間あたりの線量率($\mu\text{Sv/h}$)を測定する。測定回数は5回とする。
- (3) 材料における各測定毎の線量率の平均値ならびに不偏標準偏差を計算する。

演習問題

- VI-3-1. 測定した線量率の平均値を用いて、計数効率が50%と仮定できるものとして、各材料の放射能を求めよ(単位 Bq)。
VI-3-2. 測定した材料の放射性核種の崩壊の仕方や出てくる放射線について調べよ。
VI-3-3. 自然界にある放射性核種について調べよ。

VI-4. 計測・崩壊現象の統計

カードを使い、計測の統計的処理および放射性核種の壊変の確率論を考えることを目的とする。

実験方法

計測の統計処理

- (2) 10枚のカードを10回投げ、それぞれの回において表となった枚数を数える。自分のチームのデータと、他のチームのデータを全て加えた演習班全体のデータについてそれぞれ、横軸にカードの枚数、縦軸にその枚数がでた回数を総回数で割った相対度数をとり、相対度数分布のグラフを描く。

演習問題

- VI-4-1. (1)で作成した相対度数のグラフに正規分布のグラフを描き入れ、理論値と実験値の違いが生じた場合にはその理由を考察せよ。
VI-4-2. 他のチームのデータを全て足し合わせたときの平均値と平均値の分散を計算して、自分のチームだけのときとどのように異なるか調べよ。

崩壊現象の統計的解釈

(2) 20枚のカードを投げ表になった枚数を数える。裏になったカードを捨て、残りのカードを再び投げて表になった枚数を数える。この操作を4回繰り返す（これよりも先に表になった枚数が0となった場合にはそこで操作をやめる）。

(3) 自分達のデータと、他のチームを全て加えたデータについて、それぞれ、横軸に回数、縦軸に表の枚数を最初の枚数でわった比率をとって、崩壊曲線のグラフを描く。

演習問題

VI-4-3. k 回目の試行において表になった比率を y_k とすると、理想的には $y_k = (1/2)^k$ となるはずである。未知係数 a 、 p を用いて $y = ap^k$ とおき、最小二乗法により、自分のチームのデータならびに他のチームのデータ全てを合わせたものについて、それぞれ a 、 p の値ならびに相関係数 r を求めよ。これらの値について考察せよ。

VI-5. 霧箱の作製

本演習では、身近にある素材を用い、マントル等の放射線源から発生する放射線の軌跡を観察する。密閉した容器内にアルコールの気体を充満させた後、容器内を冷やして過冷却状態にすると、気体分子が空気中のちりなどを核にして凝結し、霧が発生する。霧箱でうまく放射線を見るためには、霧が発生しやすい過飽和状態にすることが肝要である。この中に放射線源を導入すると、放射線により発生した気体分子のイオンを核にして霧の軌跡を見ることができる。

実験方法

(1) 容器の底に、霧を見やすくするために、黒い紙をしく。

(2) 容器の内側の高い位置にスポンジを取り付け、黒い紙の上にも発泡スチロールの台を置き、その上に放射線源を載せる。放射線源には、ランタンの芯のマントルを用いる。

(3) スポンジにエチルアルコールをしみこませた後、ポリエチレン膜で容器を密閉する。

(4) 容器をドライアイスの上に乗せ、ドライアイスで冷やされた底近傍で、容器内の過飽和アルコールが霧となって発生することを確認する（図8）

(5) 部屋を暗くして、ポケットライトで容器内を照らし、放射線源からの放射線の飛跡を観察する。

(6) どのような軌跡が発生しているか、長さや形態などを記録する（長さの測定は目測でよい）。

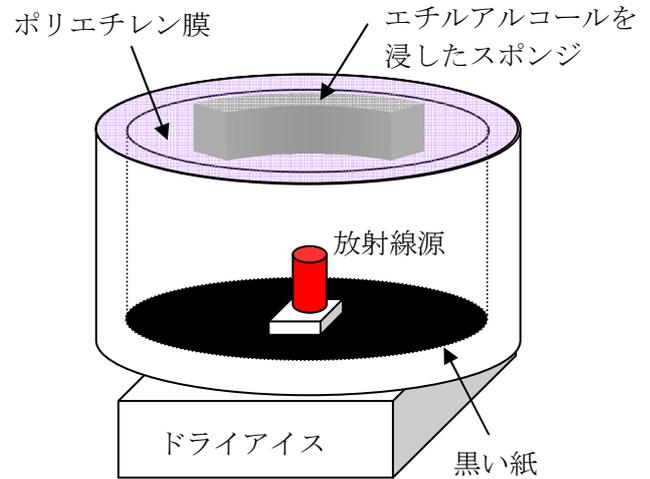


図8 霧箱の構造

演習問題

VI-5-1. マントルにはトリウム (^{232}Th) から始まる一連の放射性核種（これをトリウム系列という）が含まれている（レポート問題5を参照のこと）。これ以外に天然に存在する一連の放射性核種の系列を調べなさい。

VI-5-2. エネルギー E_α (単位 MeV) の α 粒子の乾燥空気 (15°C、1 気圧) における飛程 R (単位 cm) は以下の式で与えられる。

$$R = 0.32E_\alpha^{3/2}$$

この式が適用できるものとして、目測した飛程の長さから、マントルから放出された α 線のエネルギーを概算しなさい。

VI-5-3. α 崩壊の崩壊定数を λ とすると

$$\log_{10} \lambda = A \log_{10} R + B$$

で経験的に表される（これをガイガー・ヌッタルの法則と言う。 α 崩壊の量子トンネル効果で説明した）。ここで A と B は定数であり、マントルに含まれるトリウム系列の崩壊では、 λ を/sec、 R を cm で表すと、 $A = 59$ 、 $B = -43.4$ である。これより観測された軌跡の α 線の親核種の崩壊定数と半減期を概算せよ。

V-1. GM 管の作製 (自作した GM 管の性能について述べなさい)

V-2. 環境放射線

| 場所 | 線量率 (上段は $\mu\text{Sv/h}$ 、下段は cpm で書くこと) | | | | | | |
|----|---|-----|-----|-----|-----|----|--------|
| | 1回目 | 2回目 | 3回目 | 4回目 | 5回目 | 平均 | 不偏標準偏差 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

V-3. 材料の放射線測定

| 材料 | 線量率 (上段は $\mu\text{Sv/h}$ 、下段は cpm で書くこと) | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|----|--------|
| | 1回目 | 2回目 | 3回目 | 4回目 | 5回目 | 平均 | 不偏標準偏差 |
| 部屋内 | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

V-4. 計測・崩壊現象の統計

計測の統計処理（総数は指示された枚数を書くこと）

表の枚数（自分のチームの総数 枚、他のチームを合わせた総数 枚）

| 回数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 自分のチーム | | | | | | | | | | |
| 他のチームをあわせた合計 | | | | | | | | | | |

崩壊現象の統計的解釈（総数はインストラクターより指示された枚数を書くこと）

表の枚数（自分のチームの総数 枚、他のチームを合わせた総数 枚）

| 回数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 自分のチーム | | | | | | | | | | |
| 他のチームをあわせた合計 | | | | | | | | | | |

V-5. 霧箱の作成（観察された放射線の軌跡について、形態や長さを記録せよ）。

*レポート作成上の注意：ガイダンステキストや資料に書かれた内容を丸ごと転記してはならない。演習問題のレポートと講義内容へのレポートの両方を出さなければ失格である。レポートの総枚数は 20 枚程度とすること。コピー・模写が認められた場合には F とする。

参考資料：下記の大学初年度レベルの（1）、（2）、（7）程度の知識があるものとして本ガイダンスは書いている。また、福德先生の資料、福島先生の資料は専門家だけに貴重である。

- （1） 啓林館ユーザーの広場：物理Ⅱ (<http://www.keirinkan.com/>)
高校の先生の学習用なのでわかりやすく、詳しい。
- （2） 物理学基礎、原康夫、学術図書出版
- （3） Q&A 放射線物理 大塚徳勝著 共立出版、読みやすい。
- （4） 放射化学の基礎 コルネリウス・ケラー著、岸川俊明訳、現代工学社
著者によれば、高校から物理専門でない大学生向けとなっている。
- （5） 放射線取扱主任者試験用のテキストブック：数多く出ており、公立の図書館にも置いてあるかもしれない。
- （6） その他、WEB 上の資料（小中高生・一般向けから専門的に読めるものまで）。
- （7） 高校の数学・共通教育で使われている確率統計の教科書。