第９週（はりの断面に働く力とモーメント、教科書：第９章）：６月１３日

１．（（１）～（５）：８点、（６）：１０点）

（１）自由体線図は、図９－１（a）のようになる。

力のつり合いより

$$R_A + R_B - 2w\ell = 0$$

A 点におけるモーメントのつり合いより

$$2w\ell \times 2\ell - R_B \times 4\ell = 4w\ell^2 - 4R_B\ell = 0$$

よって、$R_A = R_B = w\ell$

（２）せん断力および曲げモーメントの正を図９－１（a）とする。AX 部分の自由体線図は図９－１（b）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = R_A = w\ell \quad \text{-----(1)}$$

切断面（X 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x = w\ell x \quad \text{-----(2)}$$

（３）AY 部分の自由体線図は図９－１（c）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = R_A - w(x-\ell) = w\ell - w(x-\ell) = w(2\ell - x) \quad \text{-----(3)}$$

切断面（Y 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x - w(x-\ell)^2/2 = w\ell x - w\left(x^2 - 4\ell x + \ell^2\right)/2$$

$$M_x = -\frac{w}{2}(x-2\ell)^2 + \frac{3w\ell^2}{2} \quad \text{-----(4)}$$

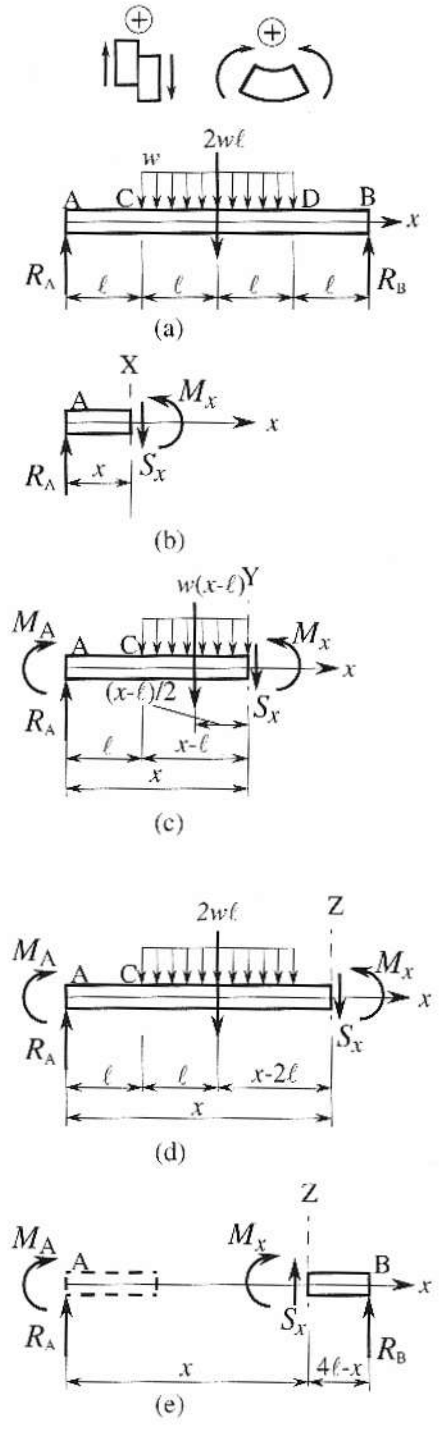


図　９－１

（4）AZ 部分の自由体線図は図９－１（d）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = R_A - 2w\ell = w\ell - 2w\ell = -w\ell \quad \text{-----(5)}$$

6

切断面（Z 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x - 2w\ell \times (x - 2\ell)$$

$$= w\ell x - 2w\ell(x - 2\ell) = -w\ell(x - 4\ell) \quad \text{-----(6)}$$

7

（5）ZB 部分の自由体線図は図９－１（e）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = -R_B = -w\ell \quad \text{-----(7)}$$

8

切断面（Z 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_B(4\ell - x) = w\ell(4\ell - x) \quad \text{-----(8)}$$

9

よって、問（4）で求めたせん断力（式(5)）と曲げモーメント（式(6)）と同じになる。

（6）

せん断力線図

$(0 \le x < 2\ell)$：式(1)

$(2\ell \le x < 3\ell)$：式(3)

$(3\ell \le x < 4\ell)$：式(5)

10

曲げモーメント線図

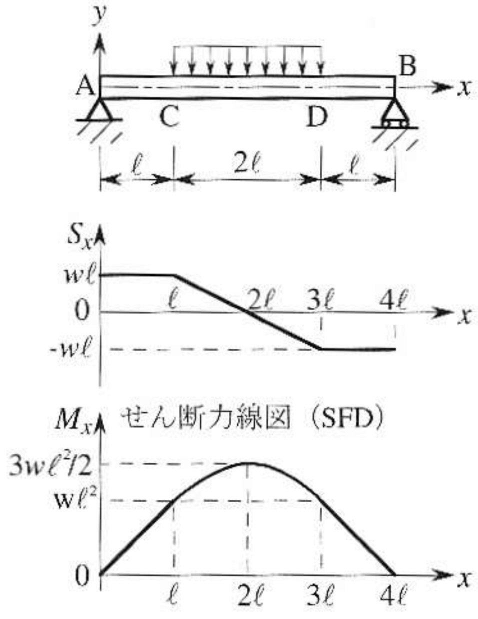
$(0 \le x < 2\ell)$：式(2)

$(2\ell \le x < 3\ell)$：式(4)

$(3\ell \le x < 4\ell)$：式(6)

11

これを図示すると、右図のようになる。



曲げモーメント線図（BMD）

2（各１０点）

（1）力のつり合いより

$$R_A - 3P = 0 \rightarrow R_A = 3P$$

1　⊕でもOK

A 点におけるモーメントのつり合いより

$$M_A + 2P \times \ell + P \times 2\ell = 0 \rightarrow M_A = -4P\ell$$

2

（2）AX 部分の自由体線図は図９－２（b）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = R_A = 3P \quad \text{-----(1)}$$

3

切断面（X 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x + M_A = 3Px - 4P\ell \quad \text{-----(2)}$$

4

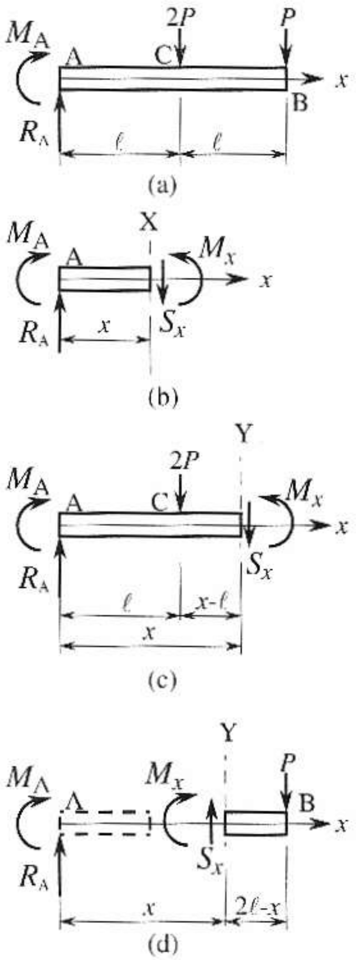


図　９－２

（３）AY 部分の自由体線図は図９－２（c）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = R_A - 2P = 3P - 2P = P \quad \text{-----(3)}$$

5

切断面（Y 点）におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x + M_A - 2P\times(x-\ell) = 3Px - 4P\ell - 2P(x-\ell)$$

$$M_x = Px - 2P\ell = P(x-2\ell) \quad \text{-----(4)}$$

6

（４）YB 部分の自由体線図は図９－２（d）のようになる。

力のつり合いより

$$S_x = P \quad \text{-----(5)}$$

7

切断面（Y 点）におけるモーメントのつり合いより

8

$$M_x = -P\times(2\ell - x) = -P(2\ell - x) \quad \text{-----(6)}$$

よって、問（３）で求めたせん断力（式(3)）と曲げモーメント（式(4)）と同じになる。

（５）

せん断力線図

$(0 \le x < \ell)$：式(1)

$(\ell \le x < 2\ell)$：式(3)

9

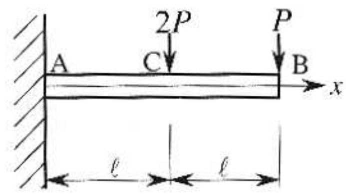
曲げモーメント線図

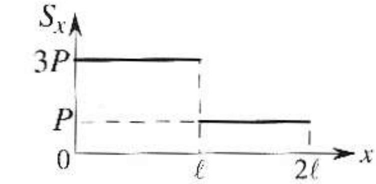
$(0 \le x < \ell)$：式(2)

$(\ell \le x < 2\ell)$：式(4)

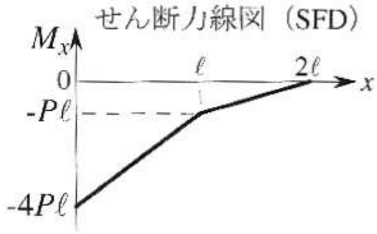
10

これを図示すると、右図のようになる。





せん断力線図（SFD）



曲げモーメント線図（BMD）

３．（１５点）

自由体線図は、図９－３（a）のようになる。

等分布荷重の場合、その中心位置にすべての荷重（$w_0\ell$）が集中すると考えることができる。中心位置は、A 点から $\ell/2$ である。

鉛直方向の力のつり合いより

$$R_A + R_B = w_0\ell$$

A 点回りのモーメントのつり合いより

$$w_0\ell\times\frac{\ell}{2} - R_B\times 2\ell = 0$$

よって、

$$R_A = \frac{3w_0\ell}{4}、\qquad R_B = \frac{w_0\ell}{4}$$

12

AC 間（$0 \le x < \ell$）のせん断力 S_x と曲げモーメント M_x は

$$S_x = R_A - w_0 x = \frac{w_0}{4}(3\ell - x)$$

13

$$M_x = R_A x - \frac{w_0 x^2}{2} = -\frac{w_0}{2}\left(x^2 - \frac{3}{2}\ell x\right)$$

$$= -\frac{w_0}{2}\left(x - \frac{3}{4}\ell\right)^2 + \frac{9 w_0 \ell^2}{32}$$

14

CB 間（$\ell \le x < 2\ell$）のせん断力 S_x と曲げモーメント M_x は

$$S_x = R_A - w_0 \ell = -\frac{w_0 \ell}{4}$$

15

$$M_x = R_A x - w_0 \ell\left(x - \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{w_0 \ell}{4}(x - \ell)$$

16

せん断力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）は、右図のようになる。

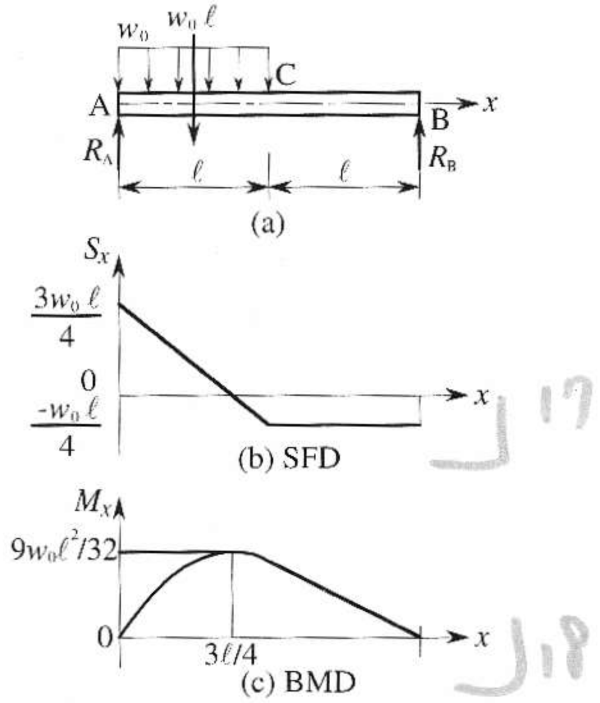


図９－３

4．（15点）

自由体線図は、図９－４（a）のようになる。

鉛直方向の力のつり合いより

$$R_A = R_B$$

A 点におけるモーメントのつり合いより

$$M_0 - 2R_B \ell = 0$$

よって

$$R_A = \frac{M_0}{2\ell}、\quad R_B = \frac{M_0}{2\ell}$$

11

つぎに、AC 間$(0 \le x < \ell)$の A 点から距離 x 離れた位置を切断すると図９－４（b）のようになる。鉛直方向の力のつり合いより、

$$S_x = R_A = \frac{M_0}{2\ell}$$

12

切断面におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x = \frac{M_0}{2\ell} x$$

13

つぎに、CB 間$(\ell \le x < 2\ell)$の A 点から距離 x 離れた位置を切断すると図９－４（c）のようになる。鉛直方向の力のつり合いより、

$$S_x = R_A = \frac{M_0}{2\ell}$$

14

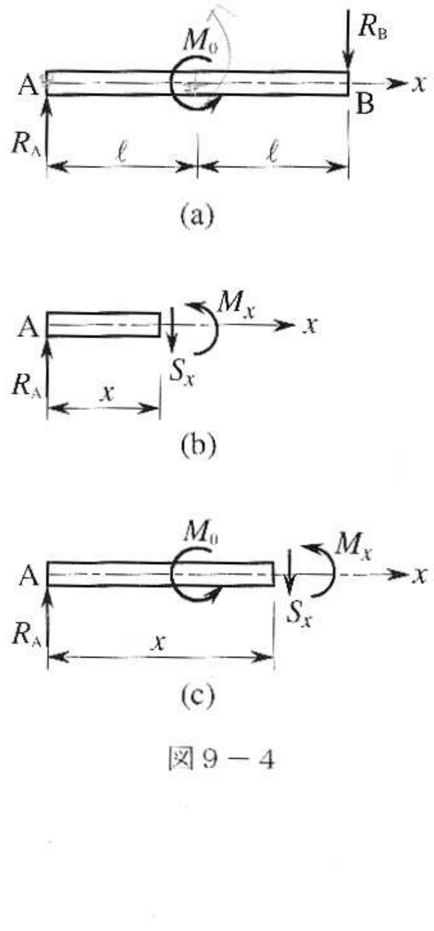
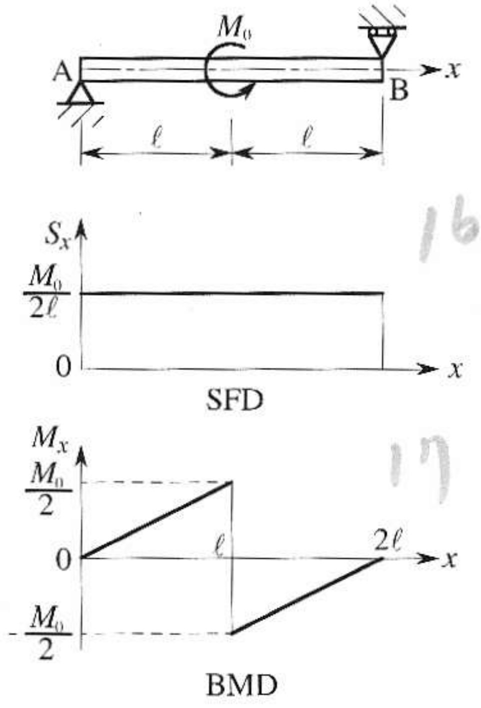


図９－４

切断面におけるモーメントのつり合いより

$$M_x = R_A x - M_0 = \frac{M_0}{2\ell}x - M_0$$ 15

せん断力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）は、右図のようになる。



SFD
BMD

5．（２０点）

自由体線図を図 9－5 に示す。

鉛直方向の力のつり合いより

$$R_A + R_D = 4P$$

A 点におけるモーメントのつり合いより

$$P\times\ell + 2P\times 2\ell + P\times 3\ell - R_D\times 4\ell = 0$$

$$R_D = 2P$$

よって　$R_A = 2P,\quad R_D = 2P$ 19

AC 間 $(0 \le x < \ell)$

$$S_x = R_A = 2P$$ 20

$$M_x = R_A x = 2Px$$ 21

CD 間 $(\ell \le x < 2\ell)$

$$S_x = R_A - P = P$$ 22

$$M_x = R_A x - P(x-\ell) = P(x+\ell)$$ 23

DE 間 $(2\ell \le x < 3\ell)$

$$S_x = R_A - P - 2P = -P$$ 24

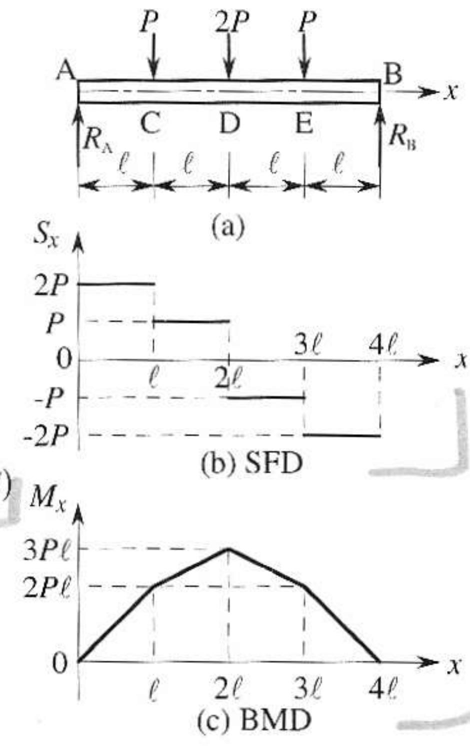
$$M_x = R_A x - P(x-\ell) - 2P(x-2\ell) = -P(x-5\ell)$$ 25

EA 間 $(3\ell \le x < 4\ell)$

$$S_x = R_A - P - 2P - P = -2P$$ 26

$$M_x = R_A x - P(x-\ell) - 2P(x-2\ell) - P(x-3\ell) = -2P(x-4\ell)$$ 27

SFD と BMD は、下図のようになる。



(a)
(b) SFD
(c) BMD

図　9－5

6．（１５点）

自由体線図は、図 9－6（a）のようになる。

鉛直方向の力のつり合いより　　$R_A = w\ell$ 30

A 点におけるモーメントのつり合いより $M_A = -3w\ell^2/2$ 31

AC 間 $(0 \le x < \ell)$

せん断力　　$S_x = R_A = w\ell$ 32

曲げモーメント　$M_x = R_A x + M_A = w\ell x - 3w\ell^2/2$ 33

CB 間 $(\ell \le x < 2\ell)$

6 □

MA プラス の人は ~~逆~~ に なってるので注意!!

せん断力　$S_x = R_A - w(x-\ell) = w\ell - w(x-\ell) = w(2\ell - x)$　34

曲げモーメント

$$M_x = R_a x + M_A - w(x-\ell)\times\frac{(x-\ell)}{2} = w\ell x - \frac{3w\ell^2}{2} - \frac{w(x-\ell)^2}{2}$$

$$M_x = -\frac{w}{2}\left(-2\ell x + 3\ell^2 + x^2 - 2\ell x + \ell^2\right) = -\frac{w}{2}(x-2\ell)^2$$ 35

せん断力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）は、右図のようになる。

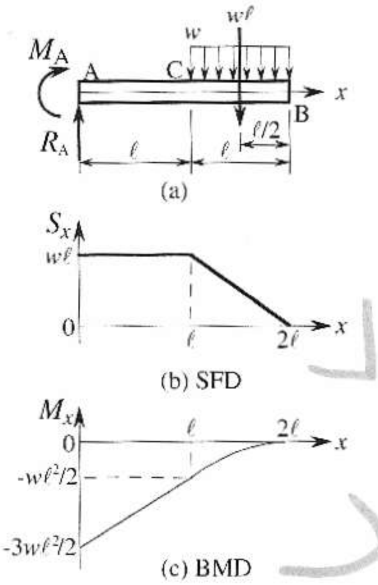


図　9－6

36　37

全37

7．（２０点）

自由体線図は、図９－７（a）のようになる。

鉛直方向の力のつり合いより

$R_A = w\ell - P = 20 - 10 = 10$ kN

A 点におけるモーメントのつり合いより

$M_A = 2P\ell - w\ell\times\frac{\ell}{2} = 20 - 10 = 10$ kN·m　18

AC 間 $(0 \le x < \ell)$

せん断力：$S_x = R_A - wx = 10 - 20x$ kN　19

曲げモーメント：

$$M_x = R_A x + M_A - \frac{wx^2}{2} = -10x^2 + 10x + 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$ 20

$= -10(x-0.5)^2 + 12.5$ kN·m

CD 間 $(\ell \le x < 2\ell)$

せん断力：$S_x = R_A - w\ell = -10$ kN　21

曲げモーメント：

$$M_x = M_A + R_A x - w\ell(x-\ell/2) = -10(x-2) \text{ kN}\cdot\text{m}$$ 22

せん断力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）は、右図のようになる。

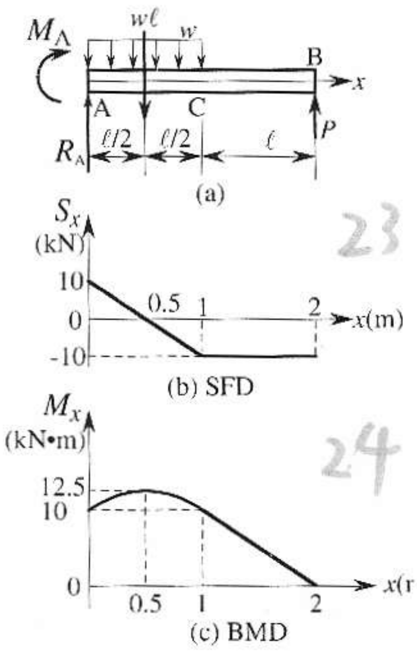


図　9－7

23　24

全24

8．（各５点）

解答略