第１０週（断面二次モーメント、教科書：第１０章）：6 月 24 日

１．（（１），（３），（５），（６），（７），（９）：５点、（２），（４），（８）：１０点）

（１）$A = bh + 2bh = 3bh$

（２）$J_{x0} = \int y_0 dA = \int_0^h y_0 \cdot bdy_0 + \int_h^{2h} y_0 \cdot 2bdy_0 = \left[\dfrac{by_0^2}{2}\right]_0^h + \left[by_0^2\right]_h^{2h} = \dfrac{bh^2}{2} + 4bh^2 - bh^2 = \dfrac{7bh^2}{2}$

（３）$e = \dfrac{J_{x0}}{A} = \dfrac{7bh^2/2}{3bh} = \dfrac{7h}{6}$

（４）$I_x = \int y^2 dA = \int_{-7h/6}^{-h/6} y^2 \cdot bdy + \int_{-h/6}^{5h/6} y^2 \cdot 2bdy = \left[\dfrac{by^3}{3}\right]_{-\frac{7h}{6}}^{-\frac{h}{6}} + \left[\dfrac{2by^3}{3}\right]_{-\frac{h}{6}}^{\frac{5h}{6}} = \dfrac{11bh^3}{12}$

（５）$J'_{x0} = bh \times h/2 = bh^2/2$、$J''_{x0} = 2bh \times 3h/2 = 3bh^2$

（６）$J_{x0} = J'_{x0} + J''_{x0} = bh^2/2 + 3bh^2 = 7bh^2/2$、$e = \dfrac{J_{x0}}{A} = \dfrac{7bh^2/2}{3bh} = \dfrac{7h}{6}$

（７）$I'_{x1} = \dfrac{bh^3}{12}$、　$I''_{x2} = \dfrac{2bh^3}{12} = \dfrac{bh^3}{6}$

（８）$I'_x = I'_{x1} + A \times \left(\dfrac{2h}{3}\right)^2 = \dfrac{bh^3}{12} + bh \times \dfrac{4h^2}{9} = \dfrac{3+16}{36}bh^3 = \dfrac{19bh^3}{36}$

$I''_x = I''_{x1} + A \times \left(\dfrac{h}{3}\right)^2 = \dfrac{2bh^3}{12} + 2bh \times \dfrac{h^2}{9} = \dfrac{3+4}{18}bh^3 = \dfrac{7bh^3}{18}$

（９）$I_x = I'_x + I''_x = \dfrac{(19+14)bh^3}{36} = \dfrac{33bh^3}{36} = \dfrac{11bh^3}{12}$

２．（各 10 点）

（１）　$dA = \dfrac{b}{h} y_0 \cdot dy_0$　　　$J_{x0} = \int y_0 dA = \int_0^h y_0 \times \dfrac{b}{h} y_0 dy_0 = \dfrac{b}{h}\left[\dfrac{y_0^3}{3}\right]_0^h = \dfrac{bh^2}{3}$

（２）　$e = \dfrac{J_{x0}}{A} = \dfrac{bh^2/3}{bh/2} = \dfrac{2h}{3}$

（３）　$I_{x0} = \int_0^h y_0^2 \times \dfrac{b}{h} y_0 dy_0 = \dfrac{b}{h}\left[\dfrac{y_0^4}{4}\right]_0^h = \dfrac{bh^2}{4}$

（４）　$I_x = I_{x0} - e^2 A = \dfrac{bh^2}{4} - \left(\dfrac{2h}{3}\right)^2 \dfrac{bh}{2} = \dfrac{bh^2}{4} - \dfrac{2bh^2}{9} = \dfrac{bh^2}{36}$

３．（１５点）

円形断面と正方形断面の図心が一致しているので、円形断面の断面二次モーメントから正方形断面の断面二次モーメントを引けば良い。

$$I_x = \frac{\pi \times 20^4}{64} - \frac{10 \times 10^3}{12} = 7020.65\ \mathrm{mm} = 0.702\ \mathrm{cm}^4$$

4．（15点）

断面は、変化しているので、各領域の微小部分の断面積 dA は、

$$dA = \left.\begin{array}{ll} 3\times dy & (-2 \le y < -1) \\ 1\times dy & (-1 \le y < 1) \\ 3\times dy & (1 \le y < 2) \end{array}\right\}$$

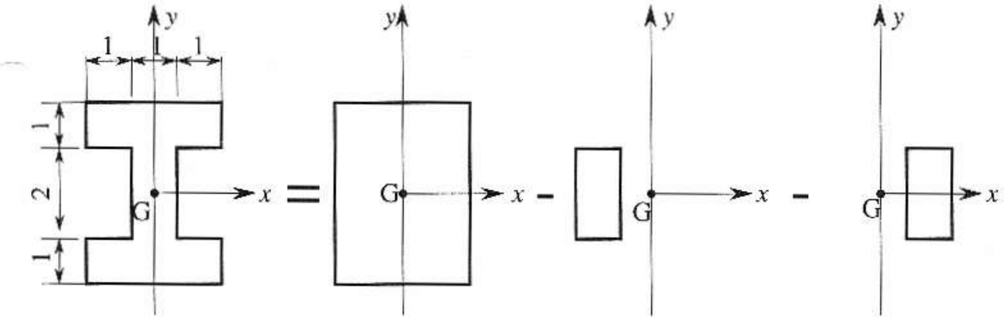
よって、求める I_x は

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-2}^{-1} 3y^2 dy + \int_{-1}^{1} y^2 dy + \int_{1}^{2} 3y^2 dy = \frac{44}{3}\ \mathrm{cm}^4$$

2

（別解）

問題の断面を下図のように三つ四角形に分解する。



四角形断面の断面二次モーメントは、その断面の図心を通るものについては、簡単に求めることができる。上の図の左の断面では、図心 G を通る x 軸に関する断面二次モーメント I_x^1 は、

$$I_x^1 = \frac{3\times 4^3}{12} = 16$$

上の図の真ん中の断面は、図心が全体の図心 G と一致しているので、図心 G を通る x 軸に関する断面二次モーメント I_x^2 は、

$$I_x^2 = \frac{1\times 2^3}{12} = \frac{2}{3}$$

同様に、上の図の左の断面での図心 G を通る x 軸に関する断面二次モーメント I_x^3 は、

$$I_x^3 = \frac{1\times 2^3}{12} = \frac{2}{3}$$

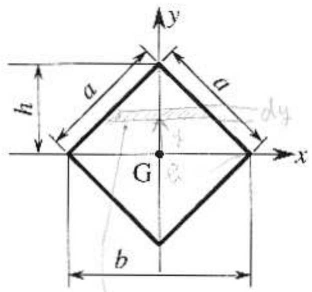
よって、求める断面二次モーメント I_x はすべて足しあわせて

$$I_x = I_x^1 - I_x^2 - I_x^3 = 16 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{44}{3}\ \mathrm{cm}^4$$

2

5．（２０点）

右図のように b と h を定義する。それらは、



$h=\sqrt{2}a/2$、 $b=2h=\sqrt{2}a$

各領域の微小部分の断面積 dA は、

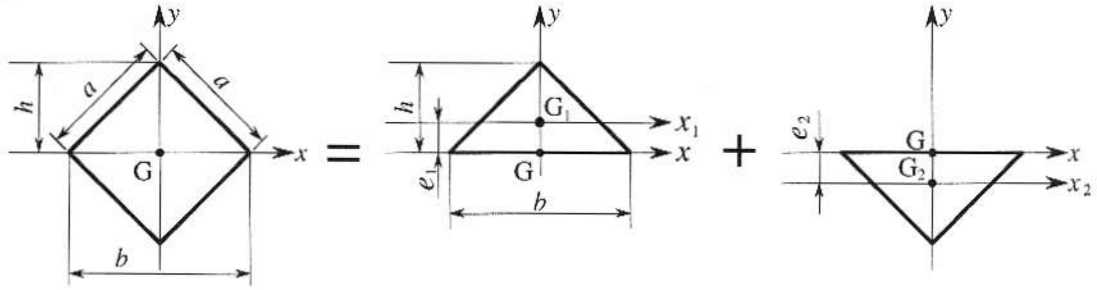
$$dA=\begin{matrix}(b-2y)dy & (y\geq 0)\\ (b+2y)dy & (y<0)\end{matrix}\Bigg\}$$

よって、断面二次モーメント I_x は

$$I_x=\int y^2 dA=\int_{-h}^{0} y^2(b+2y)dy+\int_0^h y^2(b-2y)dy=\frac{a^4}{12}$$

（別解）

下図のように正方形断面を二つの三角形断面に分解する。



ここで、$e_1=e_2=h/3$ ある。よって、左の三角形断面については、三角形の図心 G_1 を通る x1 軸に関する断面二次モーメントを求め、その値から平行軸の定理を用いて、全体の図心 G を通る x 軸関する断面二次モーメントを求める。同様にして、右の三角形断面についての全体の図心 G を通る x 軸関する断面二次モーメントを求める。その二つを足しあわせて、正方形の断面二次モーメント I_x を求める。

$$I_x=\left(\frac{bh^3}{36}+\frac{bh}{2}\times e_1^2\right)+\left(\frac{bh^3}{36}+\frac{bh}{2}\times e_2^2\right)=\frac{a^4}{12}$$

6．（２０点）

断面は、変化しているので、各領域の微小部分の断面積 dA は、

$$dA=\begin{matrix}6dy & (0\leq y<3)\\ (12-2y)dy & (3\leq y<6)\end{matrix}\Bigg\}$$

x_0 軸に関する断面一次モーメント J_{x0} は、

$$J_{x0}=\int_A ydy=\int_0^3 6ydy-\int_3^6(12-2y)ydy=63\ \text{cm}^3$$

面積 A は： $A=6\times 3+6\times 3\div 2=27\ \text{cm}^2$

よって、　$e=J_{x0}/A=\dfrac{7}{3}\ \text{cm}$

次に、x_0 軸に関する断面一次モーメント I_{x0} は、

$$I_{x0}=\int y^2 dA=\int_0^3 6y^2dy+\int_3^6(12-2y)y^2dy=\frac{405}{2}\ \text{cm}^4$$

平行軸の定理から

dA=

$b:h=x_1:h-y$

$x_1=\frac{b(h-y)}{h}$

$b:h=x_2:h-dy$

$x_2=\frac{b(h-y-dy)}{h}$

$\frac{b\{h-(y+dy)\}}{h}\cdot\{h-(y+dy)\}\cdot\frac{1}{2}$

$$I_x = I_{x0} - A \times e^2 = \frac{111}{2}\ \mathrm{cm}^4$$ 」解5

55.5cm⁴

（別解）

問題の断面を幅 6cm 高さ 3cm の長方形断面と幅 6cm 高さ 3cm の三角形断面を足したものと考える。x_0 軸に関する断面一次モーメント J_{x0} は、

$$J_{x0} = (6\times3)\times1.5 + (6\times3\div2)\times4 = 63\ \mathrm{cm}^3$$ 」4

よって、$e = \dfrac{J_{x0}}{A} = 27 = \dfrac{7}{3}$ cm

$$I_x = \left\{\frac{6\times3^3}{12} + 18\times\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\right)^2\right\} + \left\{\frac{6\times3^3}{36} + 9\times\left(\frac{7}{3}-4\right)^2\right\} = \frac{111}{2}\ \mathrm{cm}^4$$ 」解5

7．（２０点）

x_0 軸に関する断面一次モーメント J_{x0} は、

$$J_{x0} = \int_A y_0 dy_0 = \int_0^6 4y_0 dy_0 - \int_3^5 2y_0 dy_0 = \left[2y_0^2\right]_0^6 - \left[y_0^2\right]_3^5 = 56\ \mathrm{cm}^3$$ 」6

面積 A は： $A = 6\times4 - 4\times4 = 20\ \mathrm{cm}^2$

よって、　$e = J_{x0}/A = 2.8$ cm

$$I_x = \int_A y^2 dy = \int_{-2.8}^{3.2} 4y^2 dy - \int_{0.2}^{2.2} 2y^2 dy = \left[\frac{4y^3}{3}\right]_{-2.8}^{3.2} - \left[\frac{2y^3}{3}\right]_{0.2}^{2.2} = 65.87\ \mathrm{cm}^4$$ 」7

（別解）

問題の断面を幅 4cm 高さ 6cm の長方形断面から、幅 2cm 高さ 2cm の正方形断面を引いたものと考える。x_0 軸に関する断面一次モーメント J_{x0} は、

$$J_{x0} = 24\times3 - 4\times4 = 56\ \mathrm{cm}^3$$ 」6

よって、$e = \dfrac{J_{x0}}{A} = \dfrac{56}{24-4} = 2.8$ cm

$$I_x = \left(\frac{4\times6^3}{12} + 24\times0.2^2\right) - \left(\frac{2\times2^3}{12} + 4\times1.2^2\right) = 65.87\ \mathrm{cm}^4$$ 」7

8．（各５点）

教科書を見て各自で確認すること

8−9　　　全 89