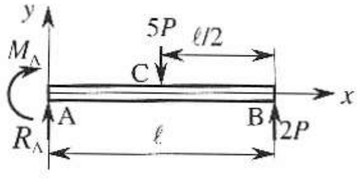
第１１週（はりの曲げ応力、教科書：第１１章）: 6 月 30 日

１．(各１０点)

（１）

自由体線図は右図のようになる。



Free Body Diagram

力のつり合いより

$$R_A = 5P - 2P = 3P$$

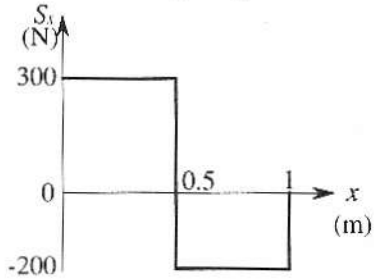
A 点におけるモーメントのつり合いより

$$M_A = 2P \times \ell - 5P \times \frac{\ell}{2} = -\frac{P\ell}{2}$$

（２）

$$S_x = R_A = 3P$$

$$M_x = M_A + R_A x = -\frac{P\ell}{2} + 3Px$$

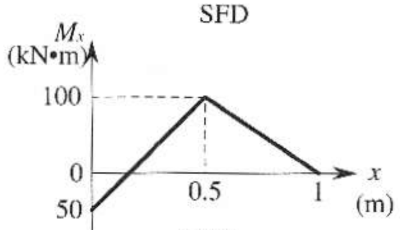


SFD

（３）

$$S_x = 3P - 5P = -2P$$

$$M_x = M_A + R_A x - 4P(x - \ell/2) = 2P\ell - 2Px$$

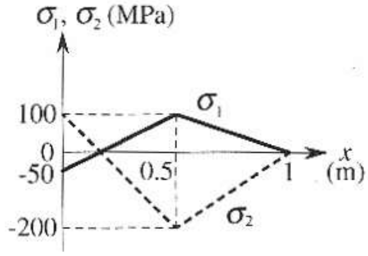


BMD

（４）

右図に示す。

（５）



$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_Z} e_1 = \frac{h/3}{bh^3/36} M_x = \frac{12}{bh^2} M_x = 1 \times 10^6 \times M_x$$

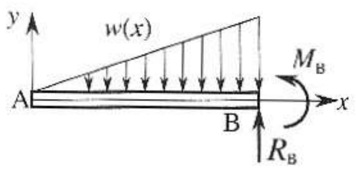
$$\sigma_2 = \frac{M_x}{I_Z}(-e_2) = -\frac{2h/3}{bh^3/36} M_x = -2 \times 10^6 \times M_x$$

右図に示す。

（６）

図より、$\sigma_{t\max} = 100$ MPa、$\sigma_{C\max} = 200$ MPa

２．(４０点)



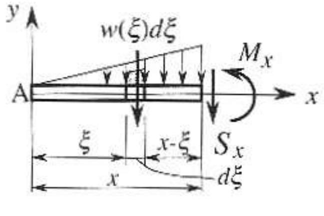
はり AB の自由体線図を右図に示す。

鉛直方向の力のつり合いより

$$R_B = \frac{w_0 \ell}{2}$$

B 点まわりのモーメントのつり合いより

$$M_B = -\int_0^{\ell} w(x)(\ell - x)dx = -\int_0^{\ell} \frac{w_0 x}{\ell}(\ell - x)dx = -\frac{w_0 \ell^2}{6}$$



次に、右図のように、A 点から距離 x 離れた位置で切断する。

鉛直方向の力のつり合いより

$$S_x = -\int_0^x w(\xi)d\xi = -\int_0^x \frac{w_0\xi}{\ell}d\xi = -\frac{w_0x^2}{2\ell}$$

切断面まわりのモーメントのつり合いより

$$M_x = -\int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi = -\int_0^x \frac{w_0\xi}{\ell}(x-\xi)d\xi = -\frac{w_0}{\ell}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}\right) = -\frac{w_0x^3}{6\ell}$$

よって、はりABに生じる最大曲げモーメント$M_{\max}$は

$$M_{\max} = \frac{w_0\ell^2}{6}$$

長方形断面の断面係数Zは、$Z = bh^2/6$

はりに生じる最大引張応力$\sigma_{\max}$は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{w_0\ell^2/6}{bh^2/6} = \frac{w_0\ell^2}{bh^2} = \frac{200\times10^3\times1^2}{0.1\times0.2^2} = 50\times10^6\ \mathrm{Pa} = 50\ \mathrm{MPa}$$

3．（25点）

曲げモーメントM_xは、

$$M_x = -P_1x = -x\ \mathrm{kN\cdot m}\quad (0\le x<1\ \mathrm{m})$$
$$M_x = -P_1x - P_2(x-1) = -3x+2\ \mathrm{kN\cdot m}\quad (1\le x<2\ \mathrm{m})$$

よって、B点で最大曲げモーメント$M_{\max}$は、$M_{\max} = 4\ \mathrm{kN\cdot m}$

B点での曲げモーメントは負なので、三角形の頂点側で引張応力が生じる。三角形断面の上側の断面係数Z_2は、

$$Z_2 = \frac{I_Z}{2h/3} = \frac{bh^2}{24}$$

最大引張応力$\sigma_{\max}$は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{M_{\max}}{bh^2/24} = \frac{24\times4\times10^3}{0.06\times0.08^2} = 250\ \mathrm{MPa}$$

4．（25点）

自由体線図を右図に示す。

鉛直方向の力のつり合いより、固着端反力R_Aは、$R_A = W$

固着端まわりのモーメントのつり合いより、固着端モーメントM_Aは

$$M_A = -W\ell$$

のとき、任意の位置xにおける曲げモーメントM_xは

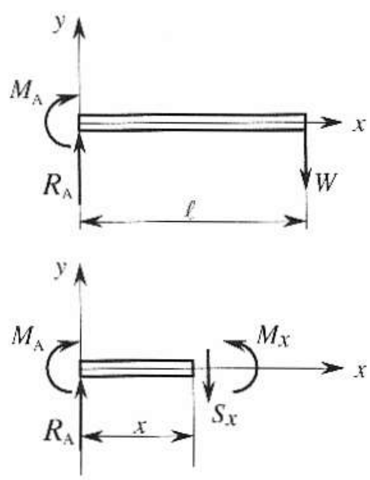
$$M_x = M_A + R_Ax = -W\ell + Wx$$

よって、最大曲げモーメント$M_{\max}$は、$M_{\max} = W\ell$

長方形の断面の断面係数Zは、$Z = bh^2/6$

最大応力σ_{max}が許容応力σ_aより小さいとき、飛び込み板は壊れないので

$$h \ge \sqrt{\frac{6SW\ell}{b\sigma_b}} = \sqrt{\frac{6\times5\times1000\times4}{0.5\times50\times10^6}} = 6.93\ \mathrm{cm}\quad (\because h>0)$$



Free Body Diagram

5．（２５点）

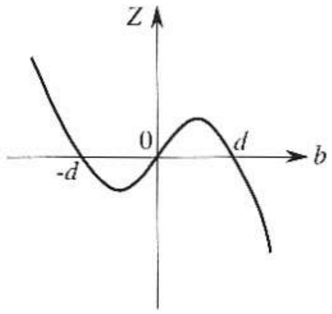
長方形断面より

$$h^2 + b^2 = d^2$$

断面係数 Z は

$$Z = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b\left(d^2 - b^2\right)}{6}$$

断面係数 Z は、右図のような幅 b に関する関数である。



$$\frac{dZ}{db} = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}d$$

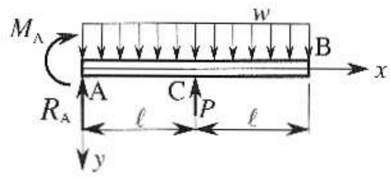
幅 b は、$0 < b < d$ の領域なので

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}d = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

6．（２５点）

自由体線図を右図に示す。



(a) Free body diagram

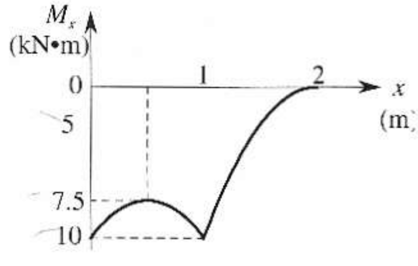
鉛直方向の力のつり合いより、固着端反力 R_A は、

$$R_A = 2w\ell - P = 2 \times 20 \times 1 - 30 = 10 \text{ kN}$$

固着端まわりのモーメントのつり合いより、固着端モーメント M_A は

$$M_A = P\ell - 2w\ell^2 = 30 \times 1 - 2 \times 20 \times 1 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

各領域の曲げモーメントは、以下のようになる。



$$M_x = M_A + R_A x + \frac{wx^2}{2} = -10x^2 + 10x - 10 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (0 \le x < 1 \text{ m})$$

$$M_x = -\frac{w}{2}(x-2)^2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (1 \le x < 2 \text{ m})$$

曲げモーメント線図は、右図のようになり、

最大曲げモーメント：$M_{max} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$

正方形断面の断面二次モーメントは、$I = a^4/12$

正方形断面の断面係数 Z は、$Z = \dfrac{I}{a/2} = \dfrac{a^3}{6}$

この材料が壊れないためには、

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{M_{max}}{a^3/6} = \frac{6M_{max}}{a^3} \le \sigma_b$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{\sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 10 \times 10^3}{60 \times 10^6}} = 10\ \mathrm{cm}$$

7.

中実丸棒と中空丸棒の断面係数および作用する曲げモーメントをそれぞれ、Z_B、Z_C および M_B、M_C とすると

$$Z_B = \frac{\pi d^4}{64} \Big/ \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$Z_C = \left(\frac{\pi d_o^4}{64} - \frac{\pi d_i^4}{64} \right) \Big/ \frac{d_o}{2}$$

ここで、$n = d_i / d_o$ より

$$Z_C = \left(\frac{\pi d_o^4}{64} - \frac{\pi n^4 d_o^4}{64} \right) \Big/ \frac{d_o}{2} = \frac{\pi d_o^3}{32}\left(1 - n^4\right)$$

中実丸棒と中空丸棒の面積は等しいので、

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(d_0^2 - d_i^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(d_0^2 - n^2 d_o^2\right) = \frac{\pi d_0^2}{4}\left(1 - n^2\right)$$

$$d^2 = \left(1 - n^2\right) d_0^2$$

$$\therefore \frac{d_o}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}}$$

両棒に等しい最大曲げ応力が作用するので、

$$\frac{M_C}{Z_C} = \frac{M_B}{Z_B}$$

$$\frac{M_C}{M_B} = \frac{Z_C}{Z_B} = \frac{\frac{\pi d_o^3}{32}\left(1 - n^4\right)}{\frac{\pi d^3}{32}} = \left(\frac{d_o}{d}\right)^3 \left(1 - n^4\right) = \frac{\left(1 - n^2\right)\left(1 + n^2\right)}{\sqrt{1 - n^2} \cdot \left(1 - n^2\right)} = \frac{1 + n^2}{\sqrt{1 - n^2}}$$