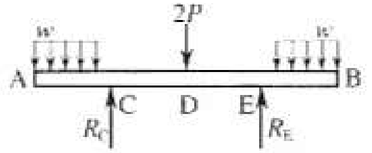
第１２週（はりの曲げ応力、教科書：第１１章）：７月８日

１．（各１０点）

（１）



自由体線図を右図の示す。鉛直方向の力のつり合いより

$$R_C + R_E = 2w\ell + 2P$$

$$\therefore R_C = R_E = w\ell + P$$

（２）

$$S_x = -wx, \qquad M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

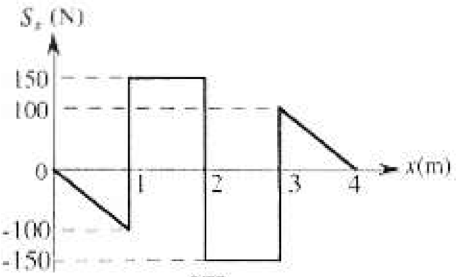
（３）

$$S_x = -w\ell + R_C = P$$

$$M_x = -w\ell \times \left(x - \frac{\ell}{2}\right) + R_C(x - \ell) = P(x - \ell) - \frac{w\ell^2}{2}$$

（４）

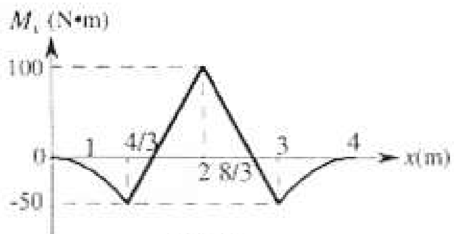
右図



SFD

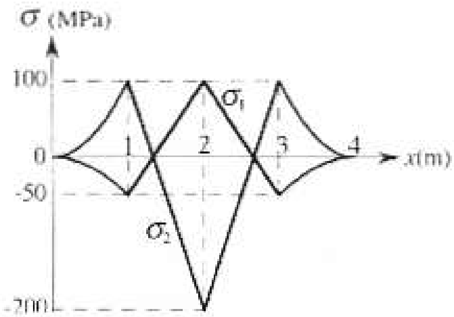
（５）

右図



BMD

（６）



図より

最大引張応力：100 MPa

最大圧縮応力：200 MPa

２．（1，２：１５点、３：１０点、）

（１）

左右対称より、$R_A = R_B$

y 方向の力のつり合いより、$\int_0^\ell w_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}dx - R_A - R_B = 0$

よって

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\int_0^\ell w_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}dx = \frac{w_0}{2}\left[-\frac{\ell}{\pi}\cos\frac{\pi x}{\ell}\right]_0^\ell = \frac{w_0\ell}{2\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{w_0\ell}{2\pi}(1+1) = \frac{w_0\ell}{\pi}$$

（２）

位置 x で切断したときの自由体線図を右図に示す。y 方向の力のつり合いより

$$S_x = R_A - \int_0^x w_0 \sin\frac{\pi\xi}{\ell}dx = \frac{w_0\ell}{\pi} - \frac{w_0\ell}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi\xi}{\ell}\right]_0^x = \frac{w_0\ell}{\pi} - \frac{w_0\ell}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{\ell} + 1\right) = \frac{w_0\ell}{\pi}\cos\frac{\pi x}{\ell}$$

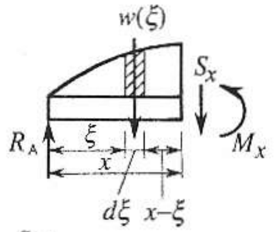
切断面でのモーメントのつり合いより

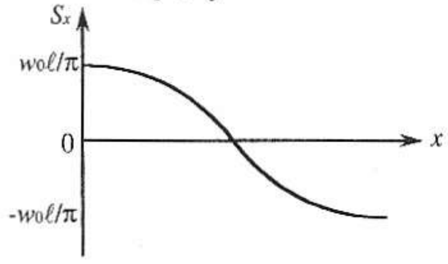
$$M_x = R_A x - \int_0^x w_0 \sin\frac{\pi\xi}{\ell}(x-\xi)d\xi$$

$$= \frac{w_0\ell}{\pi}x - w_0\left[-\frac{(x-\xi)\ell}{\pi}\cos\frac{\pi\xi}{\ell}\right]_0^x + \int_0^\ell \frac{w_0\ell}{\pi}\cos\frac{\pi\xi}{\ell}$$

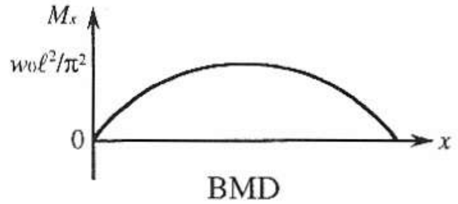
$$= \frac{w_0\ell}{\pi}x - \frac{w_0\ell}{\pi}(0+1) + \frac{w_0\ell^2}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi\xi}{\ell}\right]_0^x = \frac{w_0\ell^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{\ell}$$

せん断力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）は、右図のようになる。





SFD



BMD

（3）

曲げモーメント線図より、$M_{\max} = \dfrac{w_0\ell^2}{\pi^2}$、よって

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z}y = \frac{M_{\max}}{I_z}\frac{h}{2} = \frac{6w_0\ell^2}{\pi^2 bh^2} = 194.5\ \mathrm{MPa}$$

3．(各5点)

（1）

左右対称より、$R_C = R_D$

y 方向の力のつり合いより $R_C + R_D = 6w_0\ell \quad \rightarrow \quad R_C = R_D = 3w_0\ell$

（2）

AC 間 $(0 \le x < \ell)$

$S(x) = -w_0 x$、$M(x) = -w_0 x^2/2$

CD 間 $(\ell \le x < 5\ell)$

$S(x) = w_0(3\ell - x)$、

$$M(x) = -\frac{w_0}{2}x^2 + R_C(x-\ell) = -\frac{w_0}{2}(x-\ell)^2 + \frac{3w_0\ell^2}{2}$$

左右対称なので、DB 間は計算しない。

（3）

曲げモーメントの式より

$x = 3\ell$ のとき $M_{\max} = \dfrac{3w_0\ell^2}{2}$

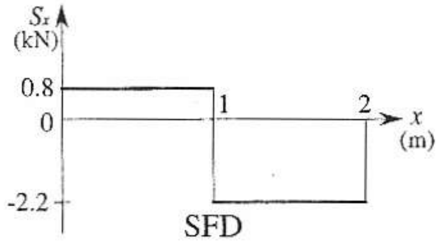
（4）

$$I_z = \int_{-3t}^{-t/2} 2ty^2dy + \int_{-t/2}^{t/2} 6ty^2dy + \int_{t/2}^{3t} 2ty^2dy = \frac{109}{3}t^4 \approx 36.3\ \mathrm{cm}^4$$

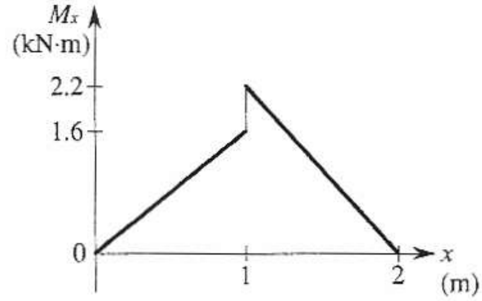
（5）

$$Z = I_z / 3t = \frac{109}{9}t^3 \approx 12.1\ \mathrm{cm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{3w_0\ell^2}{2} \times \frac{9t^3}{109} = \frac{3\times1000\times1^3\times9\times0.01^3}{2\times109} = 123.9\ \mathrm{MPa}$$



SFD



BMD

4．(２５点)

y 方向の力のつり合いより

$$R_A + R_B = P = 3\ \mathrm{kN}$$

A 点におけるモーメントのつり合いより

$$2P\ell - Pe - 3R_B\ell = 0$$

$$R_B = \frac{P(2\ell + e)}{3\ell} = \frac{3(2+0.2)}{3\times1} = 2.2\ \mathrm{kN}、$$

$$R_A = P - R_B = 3 - 2.2 = 0.8\ \mathrm{kN}$$

AC 間 $(0 \le x < 2\ \mathrm{m})$

$$S_x = R_A = 0.8、\ M_x = R_A x = 0.8x$$

CB 間 $(2 \le x < 3\ \mathrm{m})$

$$S_x = R_A - P = 0.8 - 3 = -2.2$$

$$M_x = R_A x - P(x - 2\ell) + Pe = 0.8x - 3(x-2) + 0.6 = -2.2x + 6.6$$

よって、最大曲げモーメント $M_{\max}$ は

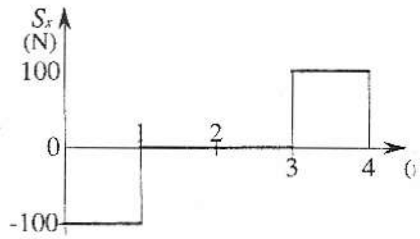
$$M_{\max} = 2.2\ \mathrm{kN\cdot m}$$

また、断面二次モーメント I_z、断面係数 Z は、

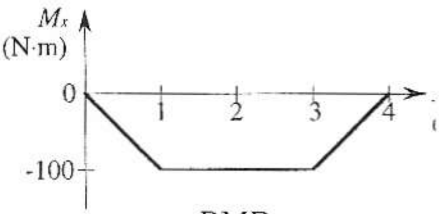
$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 16\ \mathrm{cm}^4、\quad Z = I_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = 8\ \mathrm{cm}^3$$

長方形断面をもつはりの最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{2.2\times10^3}{8\times10^{-6}} = 275\ \mathrm{MPa}$$



SFD



BMD

5．(２５点)

左右対称なので、$R_C = R_D$。鉛直方向の力のつり合いより

$$R_C + R_D = 2P \quad \Rightarrow \quad R_C = R_D = P = 100\ \mathrm{N}$$

AC 間 $(0 \le x < 1\ \mathrm{m})$

$$S(x) = -P = -100\ \mathrm{N}$$

$$M(x) = -Px = -100x \quad (\mathrm{N\cdot m})$$

CD 間 $(1 \le x < 3\ \mathrm{m})$

$$S(x) = R_A - P = 0$$

$$M(x) = -Px + R_A(x - \ell) = -P\ell = -100\ \mathrm{N\cdot m}$$

左右対称なので、せん断力線図は左右逆対象に、曲げモーメント線図は左右対称になるので、それぞれの図は右図のようになる。よって、右図より最大曲げモーメントは

$$M_{\max} = 100\ \mathrm{N\cdot m}$$

断面二次モーメント I_z と断面係数Zは、

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}、\ Z = I_z \Big/ \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

よって、最大応力$\sigma_{\max}$は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{32 M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{32 \times 100}{\pi \times 2^3 \times 10^{-6}} = 127.3\ \mathrm{MPa}$$

６．（２５点）

左右対称なので、$R_A = R_B$。鉛直方向の力のつり合いより

$$R_A + R_B = 2P_1 - P_2 \quad \Rightarrow \quad R_A = R_B = \frac{2P_1 - P_2}{2} = 0.5\ \mathrm{kN}$$

AC 間 $(0 \le x < 1\ \mathrm{m})$

$$S(x) = R_A = 0.5\ \mathrm{kN}$$

$$M(x) = R_A x = 0.5x \quad (\mathrm{kN \cdot m})$$

CD 間 $(1 \le x < 2\ \mathrm{m})$

$$S(x) = R_A - P_1 = -1.5\ \mathrm{kN}$$

$$M(x) = R_A x - P_1(x - \ell) = -1.5x + 2 \quad (\mathrm{kN \cdot m})$$

曲げモーメントの式より、$M_{\max} = 1 \quad (\mathrm{kN \cdot m})$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{M_{\max}}{bh^2/6} = \frac{6 \times 1000}{5 \times 3^2 \times 10^{-6}} = 133.3\ \mathrm{MPa}$$

７．

$y>0$： $dA = \left(\sqrt{2}a - 2y\right)dy$

$y<0$： $dA = \left(\sqrt{2}a + 2y\right)dy$

$$I_x = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-n)}^{0} \left(\sqrt{2}a + 2y\right) y^2 dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-n)} \left(\sqrt{2}a - 2y\right) y^2 dy = \frac{a^4}{12}(1-n)^3(1+3n)$$

$$Z = \frac{I_x}{\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-n)} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}(1-n)^2(1+3n)$$

$$\frac{dZ}{dn} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}(1-n)(1-9n)$$

$$Z\big|_{n=1/9} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2\left(1 + 3\frac{1}{9}\right) = \frac{\sqrt{2}a^3}{12} \cdot \frac{64}{81} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64\sqrt{2}a^3}{729}$$

$$\frac{Z\big|_{n=1/9}}{Z\big|_{n=0}} = \frac{\frac{64\sqrt{2}a^3}{729}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}} = \frac{768}{729} = 1.0535$$

よって、5.35%増