第１３週（はりのたわみ、教科書：第１２章）：7月14日

１．((１)～(３)：１０点、(４)：１５点、(５)：５点)

（１）　問題の図２(b)の自由体線図より、y方向の力のつり合いより

$$R_A = 2P$$ 1　+でもよい。

A点におけるモーメントのつり合いより

$$M_A = -P\ell - 2P\ell = -3P\ell$$ 2

（２）　AC間$(0 \le x < \ell)$：　$M_x = R_A x + M_A = 2Px - 3P\ell = P(2x - 3\ell)$ 3

CB間$(\ell \le x < 2\ell)$：　$M_x = -P(2\ell - x) = P(x - 2\ell)$ 4

（３）　たわみの微分方程式より

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}(2x - 3\ell)$$

上式を積分して

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(x^2 - 3\ell x + C_1\right)$$

(C_1は積分定数）境界条件を適用すると

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{PC_1}{EI} = 0$$

よって、C_1=0。つぎに、たわみ角の式を積分して

$$y_1 = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3\ell x^2}{2} + C_2\right)$$

(C_2は積分定数）境界条件を適用して

$$y_1\big|_{x=0} = -\frac{PC_2}{EI} = 0$$

よって、C_2=0。したがって、

たわみ角：$i_1 = \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{P}{EI}\left(x^2 - 3\ell x\right)$ 5

たわみ：$y_1 = -\dfrac{P}{EI}\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3\ell x^2}{2}\right) = -\dfrac{P}{6EI}\left(2x^3 - 9\ell x^2\right)$ 6

（４）たわみの微分方程式より

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}(x - 2\ell)$$

上式を積分して

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - 2\ell x + C_3\right)$$

(C_3は積分定数）連続条件を適用して

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\ell} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\ell}$$

両辺の式は

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\ell} = -\frac{P}{EI}\left(\ell^2 - 3\ell^2\right) = \frac{2P\ell^2}{EI}$$

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\ell} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{\ell^2}{2} - 2\ell^2 + C_3\right) = -\frac{P}{EI}\left(-\frac{3\ell^2}{2} + C_3\right)$$

よって、

$$\frac{2P\ell^2}{EI} = -\frac{P}{EI}\left(-\frac{3\ell^2}{2} + C_3\right)$$

$$C_3 = -\frac{\ell^2}{2}$$

たわみ角の式を積分して

$$y_2 = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \ell x^2 - \frac{\ell^2}{2}x + C_4\right) = -\frac{P}{6EI}\left(x^3 - 6\ell x^2 - 3\ell^2 x + 6C_4\right)$$

（C_4は積分定数）連続条件を適用して

$$\left.y_1\right|_{x=\ell} = \left.y_2\right|_{x=\ell}$$

両辺の式は

$$\left.y_1\right|_{x=\ell} = -\frac{P}{6EI}\left(2\ell^3 - 9\ell^3\right) = \frac{7P\ell^3}{6EI}$$

$$\left.y_2\right|_{x=\ell} = -\frac{P}{6EI}\left(\ell^3 - 6\ell^3 - 3\ell^3 + 6C_4\right) = -\frac{P}{6EI}\left(-8\ell^3 + 6C_4\right)$$

よって

$$\frac{7P\ell^3}{6EI} = -\frac{P}{6EI}\left(-8\ell^3 + 6C_4\right)$$

$$C_4 = \frac{\ell^3}{6}$$

たわみ角：$i_2 = \frac{dy_2}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - 2\ell x - \frac{\ell^2}{2}\right) = -\frac{P}{2EI}\left(x^2 - 4\ell x - \ell^2\right)$ J7

たわみ：$y_2 = -\frac{P}{6EI}\left(x^3 - 6\ell x^2 - 3\ell^2 x + \ell^3\right)$ J8

（4） 5 $y_{\max} = \left.y_2\right|_{x=2\ell} = -\frac{P}{6EI}\left(8\ell^3 - 24\ell^3 - 6\ell^3 + \ell^3\right) = \frac{7P\ell^3}{2EI}$

J9

２．（(１)（３）：１５点、（２）（４）：１０点）

（１）　曲げモーメント M_x は

$$M_x = -P(2\ell - x) = -P(L - x)$$

曲げモーメント M_x をたわみの微分方程式に代入して

$$EI\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M_x = P(L - x)$$

上式を積分して

$$EI\frac{dy_1}{dx} = P\left(Lx - \frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

（C_1 は積分定数）境界条件から、$x=0$ のとき $dy_1/dx=0$ より、$C_1=0$ である。そして、上式を積分して

$$EIy_1 = P\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_2\right)$$

（C_2 は積分定数）境界条件から、$x=0$ のとき $y_1=0$ より、$C_2=0$ である。よって

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{P}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{P}{2EI}\left(2Lx - x^2\right) = \frac{P}{2EI}\left(4\ell x - x^2\right)$$

$$y_1 = \frac{P}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{P}{6EI}\left(3Lx^2 - x^3\right) = \frac{P}{6EI}\left(6\ell x^2 - x^3\right)$$

10

証明終り

（２）

$$\frac{dy_{2AC}}{dx} = \frac{P}{2EI}\left(2Lx - x^2\right) = \frac{P}{2EI}\left(2\ell x - x^2\right)$$ 11

$$y_{2AC} = \frac{P}{6EI}\left(3Lx^2 - x^3\right) = \frac{P}{6EI}\left(3\ell x^2 - x^3\right)$$ 12

（３）　CB 間では、曲げモーメントが０なので、たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2 y_{2CB}}{dx^2} = 0$$

上式を積分して

$$\frac{dy_{2CB}}{dx} = C_3$$

（C_3 は積分定数）連続条件より

$$\left.\frac{dy_{2AC}}{dx}\right|_{x=\ell} = \left.\frac{dy_{2CB}}{dx}\right|_{x=\ell} = C_3$$

$$C_3 = \left.\frac{dy_{2AC}}{dx}\right|_{x=\ell} = \frac{P}{2EI}\left(2\ell^2 - \ell^2\right) = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

たわみ角の式を積分して

$$y_{2CB} = \frac{P\ell^2}{2EI}x + C_4$$

（C_4は積分定数）連続条件より

$$y_{2AC}\big|_{x=\ell} = y_{2CB}\big|_{x=\ell}$$

$$y_{2AC}\big|_{x=\ell} = \frac{P}{6EI}\left(3\ell^3 - \ell^3\right) = \frac{P\ell^3}{3EI}、\qquad y_{2CB}\big|_{x=\ell} = \frac{P\ell^3}{2EI} + C_4$$

$$\frac{P\ell^3}{2EI} + C_4 = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad \rightarrow \quad C_4 = -\frac{P\ell^3}{6EI}$$

よって

$$\frac{dy_{2CB}}{dx} = \frac{P\ell^2}{2EI}$$ 13

$$y_{2CB} = \frac{P\ell^2}{2EI}x - \frac{P\ell^3}{6EI} = \frac{P\ell^2}{6EI}(3x - \ell)$$ 14

（4）

AC 間　：　$y = y_1 + y_{2AC} = \frac{P}{6EI}\left(6\ell x^2 - x^3\right) + \frac{P}{6EI}\left(3\ell x^2 - x^3\right) = -\frac{P}{6EI}\left(2x^3 - 9\ell x^2\right)$ 15

BC 間　：　$y = y_1 + y_{2CB} = \frac{P}{6EI}\left(6\ell x^2 - x^3\right) + \frac{P\ell^2}{6EI}(3x - \ell) = -\frac{P}{6EI}\left(x^3 - 6\ell x^2 - 3\ell^2 x + \ell^3\right)$ 16

よって、問 1 と同じ答えになる。

3．（２０点）

$b^2 + h^2 = d^2$より、$h = \sqrt{d^2 - b^2}$　$(\because h > 0)$。よって、断面二次モーメントは

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{b\left(d^2 - b^2\right)\sqrt{d^2 - b^2}}{12}$$ 1

上式を微分して

$$\frac{dI_z}{db} = \frac{\left(d^2 - 3b^2\right)\sqrt{d^2 - b^2}}{12} + \frac{b\left(d^2 - b^2\right)}{12} \times \frac{-b}{\sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{d^2 - b^2}}{12}\left(d^2 - 4b^2\right)$$ 2

$dI_z/dh = 0$より、$b = \pm d,\ \pm\frac{1}{2}d$ 。ここで、b>0 より

b	0	…	b/2	…	d
I_z	0	↗		↘	0
dI_z/db		+	0	-	

$b = \frac{d}{2}$, 3　$h = \frac{\sqrt{3}}{2}d$ 4

4．（各１０点）

（１）

$$M_x = -w(\ell - x) \times \frac{(\ell - x)}{2} = -\frac{w(\ell - x)^2}{2}$$

たわみの微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{w}{2EI}\left(x^2 - 2\ell x + \ell^2\right) \quad \text{-----(1)}$$ 5

上式を積分して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \ell^2 x + C_1\right) \quad \text{-----(2)}$$

境界条件（$x=$ のとき $dy/dx=0$）より

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\ell} = \frac{w}{2EI}C_1 = 0$$

よって、$C_1 = 0$。式(2)に C_1 を代入して、積分すると

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell}{3}x^3 + \frac{\ell^2}{2}x^2 + C_2\right)$$

境界条件（$x=$ のとき $y=0$）より

$$y|_{x=\ell} = \frac{w}{2EI}C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

よって

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - \ell x^2 + \ell^2 x\right) = \frac{w}{6EI}\left(x^3 - 3\ell x^2 + 3\ell^2 x\right)$$ 7

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell^3}{3}x + \frac{\ell^4}{4}\right) = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 4\ell^3 x + 3\ell^4\right)$$

よって、

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell}{3}x^3 + \frac{\ell^2}{2}x^2\right) = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 4\ell x^3 + 6\ell^2 x^2\right)$$ 8

ここで、$I = \pi d^4/64$、$w = \gamma \times \pi d^2/4 = \pi\gamma d^2/4$ より

$$y_{\max} = y|_{x=\ell} = \frac{w\ell^4}{8EI} = \frac{\pi\gamma d^2/4 \times \ell^4}{8E \times \pi d^4/64} = \frac{2\gamma\ell^4}{Ed^2}$$ 9

（２）

$$y_{\max} = \frac{2\gamma\ell^4}{Ed^2} < 0.001$$ 10

$$\ell < \sqrt[4]{\frac{0.001Ed^2}{2\gamma}} = \sqrt[4]{\frac{0.001 \times 200 \times 10^9 \times 0.01^2}{2 \times 78 \times 10^3}} = 59.9\ \text{cm}$$ 11

５．（２０点）

曲げモーメント M_x は、

$$M_x = Pe$$

これをたわみの微分方程式に代入して

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Mx = -Pe$$

上式を積分して

$$EI\frac{dy}{dx} = -Pe\left(x + C_1\right) \text{-----(1)}$$

（C_1 は積分定数）境界条件より

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\ell} = -Pe\left(\ell + C_1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\ell$$

(1)式を積分して

$$EIy = -Pe\left(\frac{x^2}{2} - \ell x + C_2\right)$$

（C_2 は積分定数）境界条件より

$$EIy|_{x=\ell} = -Pe\left(\frac{\ell^2}{2} - \ell^2 + C_2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell^2}{2}$$

$$y = -\frac{Pe}{2EI}\left\{x^2 - 2\ell x + \ell^2\right\}$$

$$i_A = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{Pe\ell}{EI}\text{、}\qquad y_A = y|_{x=0} = -\frac{Pe\ell^2}{2EI}$$

６．（２０点）

A 点での反力を R_A（上向き）と固着端モーメントを M_A（時計回り）とすると、鉛直方向の力のつり合いと A 点でのモーメントのつり合いから、

$$R_A = w\ell\text{、}\ M_A = -\frac{3w\ell^2}{2}$$

AC 間（$0 \le x < \ell$）での曲げモーメント M_{1x} は、

$$M_{1x} = M_A + R_A x = w\ell x - \frac{3w\ell^2}{2} = \frac{w\ell}{2}(2x - \ell)$$

AC 間のたわみを y_1 とする。たわみの微分方程式より

$$EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = -M_{1x} = -\frac{w\ell}{2}(2x - \ell)$$

上式を積分して

$$EI\frac{dy_1}{dx} = -\frac{w\ell}{2}\left(x^2 - \ell x + C_1\right)$$

（C_1 は積分定数）境界条件より（x=0 のとき dy_1/dx=0）、C_1=0。上式を積分して

$$EIy_1 = -\frac{w\ell}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} + C_2\right)$$

（C_2は積分定数）境界条件より（x=0 のとき y_1=0）、C_2=0。よって

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{w\ell}{2EI}\left(x^2 - \ell x\right) \quad \text{-----(1)}$$

$$y_1 = -\frac{w\ell}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2}\right) = -\frac{w\ell}{12EI}\left(2x^3 - 3\ell x^2\right) \text{----(2)}$$

次に、CB 間（$\ell \le x < 2\ell$）の曲げモーメント M_{2x}は

$$M_{2x} = M_A + R_A x - \frac{w(x-\ell)^2}{2} = -\frac{w}{2}\left(x^2 - 4\ell x + 4\ell^2\right)$$

CB 間のたわみを y_2とする。たわみの微分方程式は

$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -M_{2x} = \frac{w}{2}\left(x^2 - 4\ell x + 4\ell^2\right)$$

上式を積分して

$$EI\frac{dy_2}{dx} = \frac{w}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 2\ell x^2 + 4\ell^2 x + C_3\right)$$

（C_3は積分定数）連続条件より

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\ell} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\ell}$$

$$C_3 = -\frac{\ell^3}{3}$$

たわみ角の式を積分して

$$EIy_2 = \frac{w}{2}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{2\ell x^3}{3} + 2\ell^2 x^2 - \frac{\ell^3 x}{3} + C_4\right)$$

（C_4は積分定数）連続条件より

$$\left.y_{2AC}\right|_{x=\ell} = \left.y_{2CB}\right|_{x=\ell}$$

$$C_4 = \frac{\ell^4}{12}$$

$$y_2 = \frac{w}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{2\ell x^3}{3} + 2\ell^2 x^2 - \frac{\ell^3 x}{3} + \frac{\ell^4}{12}\right) = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 8\ell x^3 + 24\ell^2 x^2 - 4\ell^3 x + \ell^4\right)$$

$$y_{\max} = \left.y_2\right|_{x=2\ell} = \frac{w\ell^4}{24EI}(16 - 64 + 96 - 8 + 1) = \frac{41w\ell^4}{24EI}$$

７．（２０点）

自由体線図省略

A 点での反力を R_A（上向き）と固着端モーメントを M_A（時計回り）とすると、鉛直方向の力のつり合いと A 点でのモーメントのつり合いから、

$$R_A = w\ell - P、\ M_A = P\ell - \frac{w\ell^2}{2} \qquad (1)$$

曲げモーメント M_x は、

$$M_x = M_A + R_A x - \frac{w}{2}x^2$$

たわみを y とする。たわみの微分方程式より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(M_A + R_A x - \frac{w}{2}x^2\right)$$

上式を積分して

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_A x + \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1\right)$$

（C_1 は積分定数）境界条件より（x=0 のとき dy_1/dx=0）、C_1=0。上式を積分して

$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_2\right)$$

（C_2 は積分定数）境界条件より（x=0 のとき y_1=0）、C_2=0。よって

$$y = -\frac{1}{24EI}\left(12M_A x^2 + 4R_A x^3 - wx^4\right)$$

B 点でたわみが 0 なので、

$$y\big|_{x=\ell} = -\frac{\ell^2}{24EI}\left(12M_A + 4R_A\ell - w\ell^2\right) = 0$$

上式に式（1）を代入して、解くと

$$P = \frac{3w\ell}{8}$$