材料力学中間試験について

平成 14 年 11 月 12 日
中村

出題範囲

不静定はり（テキスト１３章）
平等強さのはり（テキスト１４章）
棒のねじり（テキスト１５章）
コイルばね（テキスト１６章）
長柱の座屈（テキスト１８章）

テキスト、ノート；持ち込み不可。
関数計算機；持参すること。

材料力学中間試験問題（平成１４年度後期）

１）問題１は必ず解きなさい。

２）問題２、３、４のうち２問を選んで答えなさい。

１．図１に示すようなはりにおいて、固定点Ａにおける固着モーメント M_A、反力 R_A、ならびに固定点 B における固着モーメント M_B、反力 R_B を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。

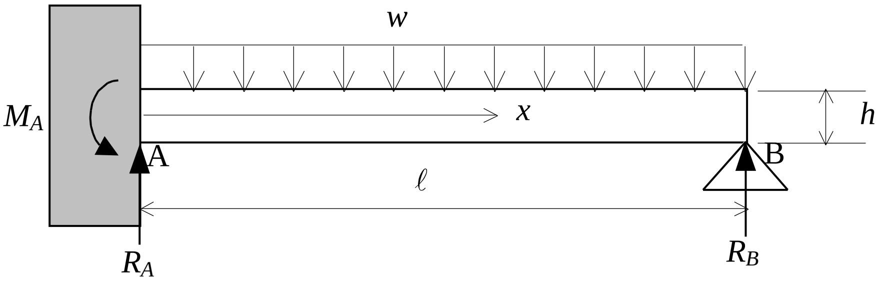


図１

２．床に垂直に、長さ 30 cm、幅 3 cm、厚さ 0.3 cm の高分子材料の板が立てられており、床に接した棒の一端は自由に回転できるものとする。この材料の縦弾性係数は１ GPa である。この棒の軸に沿って、自由端に圧縮の荷重を加えたとき、臨界座屈荷重 P_{cr} を求めよ。

３．長さℓ、矩形断面の高さ h を有する片持ちはりに一様な分布荷重 w が作用している。このはりの材料の縦弾性係数は E であり、破壊強度はσ_f である。破壊まで材料は弾性的に変形するものとする。任意の位置において、はりの断面に作用する最大曲げ応力を均一にして破壊強度の 1/4 以下にしたい。固定端からの距離 x の関数として、はりの幅 $b(x)$を求めよ。

４．長さ５m、直径１０ｃｍ丸棒の一端が壁に固定され、自由端にはトルク Tが作用しているとき、比ねじれ角が 0.02 rad であった。この円筒の横弾性係数 G = 80 GPa とするとき、断面に作用する最大せん断応力τ_{max} をならびにトルク T を求めよ。

解答例

1．

はりの自由体の力の釣り合いより、 $R_A + R_B = w\ell$、

また、A 点まわりのモーメントのつり合いより、 $M_A = -R_B\ell + \frac{w\ell^2}{2}$

よって、$S_x = R_A - \frac{wx^2}{2}$、 $M_x = -\frac{wx^2}{2} + R_A x - M_A$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = \frac{wx^2}{2} - R_A x + M_A、\quad EI\frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{6} - \frac{R_A x^2}{2} + M_A x + C_1、$$

$$EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{R_A x^3}{6} + \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

境界条件

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0、\quad \left.y\right|_{x=0} = 0、\quad \left.y\right|_{x=\ell} = 0$$

より、

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = C_1 = 0、\quad EI\left.y\right|_{x=0} = C_2 = 0$$

$$EI\left.y\right|_{x=\ell} = \frac{w\ell^4}{24} - \frac{R_A\ell^3}{6} + \frac{M_A\ell^2}{2} = 0$$

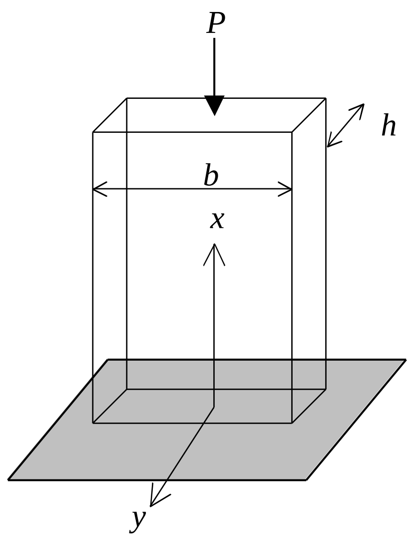
ここで、 $M_A = -R_B\ell + \frac{w\ell^2}{2} = R_A\ell - \frac{w\ell^2}{2}$ を上式に代入すると

$$\frac{w\ell^4}{24} - \frac{R_A\ell^3}{6} - \frac{w\ell^4}{4} + \frac{R_A\ell^3}{2} = -\frac{5w\ell^4}{24} + \frac{R_A\ell^3}{3} = \frac{\ell^3}{3}\left(-\frac{5w\ell}{8} + R_A\right) = 0$$

従って、力とモーメントの釣り合いの結果より、以下を得る。

$$R_A = \frac{5w\ell}{8}、\quad R_B = \frac{3w\ell}{8}、\quad M_A = \frac{w\ell^2}{8}$$

2．幅方向に平行な中立軸回りの断面２次モーメント



$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{3\times10^{-2}\times(0.3\times10^{-2})^3}{12} = 6.75\times10^{-11}\ \mathrm{m}^4$$

床から x の高さにおけるたわみを y とするときの
曲げモーメント

$$M_x = Py$$

となるから、たわみの式は以下のようになる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y = -k^2 y$$

（ただし、ここで、 $k = \sqrt{P/EI}$ とした）

これより、

$$y = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

を得る。境界条件より、 $\left.y\right|_{x=0} = A + B = 0$ より、

$$y = A(e^{ikx} - Be^{-ikx}) = 2Ai\sin kx$$

また、 $\left.y\right|_{x=\ell} = 2Ai\sin k\ell = 0$ より、

$$k\ell = n\pi,\quad n = 1, 2, \cdots$$

を得る。これより、座屈が生じる荷重は$P = n^2 \dfrac{EI\pi^2}{\ell^2}$， $n = 1, 2, \cdots$であり、最小値となる臨界座屈荷重は、 $n = 1$のときで、

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{\ell^2} = \frac{3.14^2 \times 1 \times 10^9 \times 6.75 \times 10^{-11}}{(30 \times 10^{-2})^2} \text{ N} = 7.4 \text{ N}$$

となる。

３．はりにおける中立軸回りの断面２次モーメントは、断面の高さを h とすると、

$$I = \frac{b(x)h^3}{12}$$

である。また、はりの長さを l とすると、x の位置での曲げモーメントは

$$M_x = -\frac{w(\ell - x)^2}{2}$$

となり、引張側における曲げ応力の最大値は、

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I}\frac{h}{2} = \frac{3w(\ell - x)^2}{b(x)h^2}$$

である。はりの材料の破壊強度をσ_f とするとき、$\sigma_{\max}$ をその 1/3 以下となるようにするためには、

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{3w(\ell - x)^2}{b(x)h^2} \leq \frac{\sigma_f}{4}$$

であるから、はりの断面の幅は、以下のようになる。

$$b(x) \geq \frac{12w(\ell - x)^2}{\sigma_f h^2}$$

４．長さを l とし、ねじれ角をφとすると、単位長さあたりの比ねじれ角γは以下で与えられる。

$$\theta = \frac{\varphi}{l}$$

よって、R は棒の外半径とすると、

$$\tau_{\max} = GR\theta = \frac{GR\varphi}{\ell} = \frac{80 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-2} \times 0.02}{5} = 16 \times 10^6 \text{ Pa} = 16 \text{ MP}$$

であり、トルクは以下となる。

$$T = \int_A \tau r dA = 2\pi G\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G\theta R^4}{2} = \frac{\pi\tau_{\max} R^3}{2} = 3.1 \times 10^3 \text{ N m} = 3.1 \text{ kN m}$$