材料力学　中間試験

１．図１に示すように、一端（A 点）が壁に固定され、多端（B 点）が自由支持を受けている、長さℓのはりがあり、はりには均一分布荷重 w が作用している。このとき以下の各問いに答えなさい。ただし、はりの曲げ剛性を EI としてよい。

（１）　A 点での反力を R_A、固定モーメントを M_A とし、B 点での反力を R_B とするとき、力のつり合い、A 点回りのモーメントのつり合い、ならびに B 点回りのモーメントのつり合いを求めなさい。

（２）　A 点からはりにそって x 軸を取るとき、任意の断面でのせん断力 S_x と曲げモーメント M_x を求めなさい。

（３）　はりのたわみの式と境界条件を求めなさい。

（４）　（１）の条件を用い、（３）を解いて、M_A、R_A、R_B を決定しなさい。

なお、上記（１）～（４）の手順によらない解法で求めても良い。

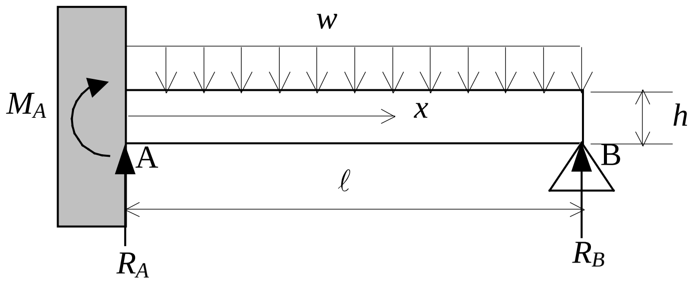

図１．

２．問題１において、はりの長さは 5 m、縦弾性係数 E は 200GPa であり、破壊強さは 600MPa である。分布荷重 w = 400 N/m のとき、はりの断面の高さ h = 10 cm として、はり中の曲げ応力が破壊強さの 1/3 を越えないようなはりの断面の幅 $b(x)$を m 単位で求めなさい。なお、解答でもちいる座標 x の単位も m としなさい。

３．以下の３問の内、１問を選んで答えなさい（解答には問題番号を記すこと）。

（１）　長さ 3 m の鋼製の丸棒（半径 5 cm、横弾性係数 80 GPa）がある。この丸棒が 3600 rpm で回転して 200 馬力の動力を伝達するとき、最大せん断応力を求めなさい。ただし、１馬力は 735 Nm/s とする。

（２）　長さ 1 m、半径 1 cm、ヤング率 100 GPa の丸棒がある。丸棒の下端は床に固定して止められ、上端には回転支持で荷重 P が付加されている。このとき、臨界座屈荷重 P_{cr} を求めなさい。

（３）　長さ 14 cm、半径 5 cm のガラスの丸棒が床に置いてある。ガラスのヤング率は 70 GPa であり、圧縮破壊強度は 1000 MPa である。1 m の高さから 500 kgf の物体を落としたとき、衝撃荷重でガラスが圧縮破壊するかどうか求めなさい。

材料力学　中間試験

解答例

１．

（１）力の釣り合い：$R_A + R_B = w\ell$、

A 点まわりのモーメントのつり合い：$M_A = R_B\ell - \dfrac{w\ell^2}{2}$

B 点まわりのモーメントのつり合い：$M_A = \dfrac{w\ell^2}{2} - R_A\ell$

（２）$S_x = R_A - \dfrac{wx^2}{2}$、$M_x = -\dfrac{wx^2}{2} + R_A x + M_A$

（３）$EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M_x = \dfrac{wx^2}{2} - R_A x - M_A$、$EI\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{wx^3}{6} - \dfrac{R_A x^2}{2} - M_A x + C_1$、

$$EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

境界条件

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0\text{、}\quad y\big|_{x=0} = 0\text{、}\quad y\big|_{x=\ell} = 0$$

（４）境界条件より、

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = C_1 = 0\text{、}\quad EI\,y\big|_{x=0} = C_2 = 0$$

$$EI\,y\big|_{x=\ell} = \frac{w\ell^4}{24} - \frac{R_A\ell^3}{6} - \frac{M_A\ell^2}{2} = 0$$

ここで、B 点まわりのモーメントの釣り合い $M_A = \dfrac{w\ell^2}{2} - R_A\ell$ を上式に代入すると

$$\frac{w\ell^4}{24} - \frac{R_A\ell^3}{6} - \frac{w\ell^4}{4} + \frac{R_A\ell^3}{2} = -\frac{5w\ell^4}{24} + \frac{R_A\ell^3}{3} = \frac{\ell^3}{3}\left(-\frac{5w\ell}{8} + R_A\right) = 0$$

従って、（１）の結果より、

$$R_A = \frac{5w\ell}{8}\text{、}\quad R_B = \frac{3w\ell}{8}\text{、}\quad M_A = -\frac{w\ell^2}{8}$$

２．断面二次モーメントは、$I(x) = \dfrac{b(x)h^3}{12}$ であるから、最大曲げ応力σ_{max}に付与される条件は以下のようになる。

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M_x}{I(x)}\frac{h(x)}{2} = \frac{12M_x}{b(x)h^2} = \frac{12M_x}{b(x)\times 0.0001} < \frac{600}{3} = 200\,MPa = 200\times 10^6\ \ \mathrm{Nm^{-2}}$$

問題１の結果より、

$M_x = -\dfrac{wx^2}{2} + \dfrac{5}{8}w\ell^2 - \dfrac{w\ell^2}{8} = \dfrac{w}{2}(\ell^2 - x^2) = 100(25 - x^2)$　Nmであるから、

$$b(x) > \frac{200(25 - x^2)}{0.0001\times 200\times 10^6} = 0.25 - 0.01\,x^2\ \ \mathrm{m}$$

３．

（１）角速度ωは、$\omega = \dfrac{2\pi \times 3600}{60} = 120\pi$であるから、トルク T は、

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{240 \times 735}{120\pi} = \frac{1470}{\pi} \quad \mathrm{Nm}$$

となり、丸棒の断面２次極モーメントは半径を r とすると、

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (0.05)^4}{2} \quad \mathrm{m}^4$$

であるから、最大せん断応力は以下のようになる。

$$\tau_{\max} = \frac{r}{I_p} T = \frac{2}{\pi (0.02)^3} \frac{1470}{\pi} = \frac{2940}{8\pi^2} \times 10^6 \quad \mathrm{N} = 37 \quad \mathrm{MP}$$

（２）下端からの位置を x とし、たわみを y とすると、上端でのたわみがδのとき、x の位置での曲げモーメント M_x は以下で与えられる。

$$M_x = -P(\delta - y)$$

よってたわみの式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI}(\delta - x)$$

で与えられ、この解は、

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x + C_2 \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x + \delta$$

である。境界条件より、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = C_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0\,, \qquad C_2 = 0$$

$$\left. y \right|_{x=0} = C_1 + \delta = 0, \qquad C_1 = -\delta$$

であり、さらに

$$\left. y \right|_{x=\ell} = \delta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell\right) = 0\,, \qquad \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell = 1$$

より、

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

もっとも小さな荷重は $n = 1$ のときであり、

$$P_{cr} = \frac{\pi EI}{4\ell^2}$$

となる。ここで、断面二次モーメントは丸棒の半径を r とすると、

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

であるから、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 r^4 E}{16\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 0.02^4 \times (100 \times 10^9)}{16} \quad \mathrm{N} = \pi^2 \times 1000 \ \mathrm{N} = 9.87 \quad \mathrm{kN}$$

（３）W を物体の重さ、P をガラス棒に作用する衝撃荷重、λをそのときの縮みとすると、弾性エネルギー

は

$$\frac{1}{2}P\lambda = W(h+\lambda)$$

となる。両辺をガラス棒の断面積 A、長さℓで割ると、衝撃応力σとそのときのひずみε は

$$\frac{1}{2}\frac{P}{A}\frac{\lambda}{\ell} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{W}{A}\frac{h}{\ell} + A\frac{\lambda}{\ell} = \frac{W}{A}\frac{h}{\ell} + A\varepsilon$$

で関係つけられる。よって、フックの法則より、衝撃応力σに関して、

$$\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{W}{A}\frac{h}{\ell} + \frac{W\sigma}{AE}, \quad \sigma^2 - \frac{2W}{A}\sigma - 2\frac{EWh}{A\ell} = 0$$

$$\sigma = \frac{W}{A} + \sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2 + 2\frac{EWh}{A\ell}} = \frac{W}{A}\left\{1 + \sqrt{1 + 2\frac{EAh}{W\ell}}\right\}$$

を得る。ここで、ガラス棒が破壊しないためには、圧縮破壊強度をσ_fとすると、衝撃応力σ はこれよりも小さくなければならない：

$$\sigma < \sigma_f$$

これから

$$\sqrt{1 + 2\frac{EAh}{W\ell}} < \frac{A}{W}\sigma_f - 1$$

$$1 + 2\frac{EAh}{W\ell} < \left(\frac{A}{W}\sigma_f - 1\right)^2 = \frac{A^2}{W^2}\sigma_f^2 - 2\frac{A}{W}\sigma_f + 1$$

$$2\left(\frac{EAh}{\ell} + A\sigma_f\right)W < A^2\sigma_f^2$$

となり、ガラス棒が破壊しないような物体の荷重 W は以下のように与えられる。

$$\therefore W < \frac{1}{2}\frac{A^2\sigma_f^2}{\frac{EAh}{\ell} + A\sigma_f} = \frac{1}{2}\frac{A\sigma_f}{\frac{Eh}{\sigma_f\ell} + 1} = \frac{1}{2}\frac{0.05^2\pi \times 1000 \times 10^6}{\frac{70 \times 10^9 \times 1}{1000 \times 10^6 \times 0.14} + 1}\ \mathrm{N} = \frac{1}{2}\frac{25\pi \times 10^5}{501}\ \mathrm{N} = 7.84\ \mathrm{kN} = 800\ \ \mathrm{kgf}$$

よって、落下した物体の荷重は 500 kgf であるから、ガラス棒は破壊しない。