平成１６年度　材料力学中間試験　　　平成１２年１２月１６日

問題１～４：中村担当分の問題
（問題１は必ず解きなさい。問題２～４については、２問を選択して解きなさい）

問題５：戸谷担当分の問題
（問題５は必ず解きなさい）

１．図１に示すように、長さℓの片持ちはり（曲げ剛性EI）は、固定端 A 点から距離 a の位置にモーメント M が作用し、自由端 B 点ではばね（ばね係数 k）で支えられている。以下の各問いに答えなさい。

（1）固定点 A での反力 R_A、固定モーメント M_A ならびにばねに働く力 R_B を求めなさい。ただし、はりの自由体図を描き、R_A、M_A、R_B の正の向きを提示すること。

（2）自由端 B のたわみδを求めなさい。

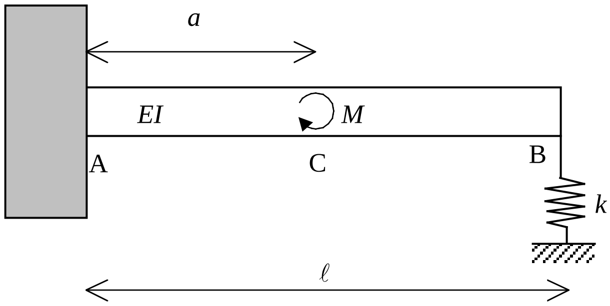


図1

２．図２のように、断面の高さ h、長さℓの両端支持はりの中央に集中荷重 P とはり全体に均一分布荷重 w が作用している。このはりにおいて、任意の断面での最大曲げ応力の値がσ_bとなるような幅 b を求めなさい。

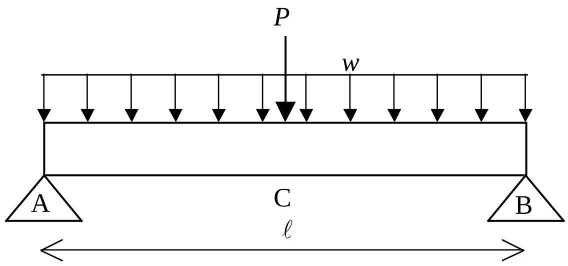


図2

３．長さ 20 m、外径 1 m、厚さ 20 cm の鋼製の円筒状軸が、5000 rpm で回転し 2000 馬力の動力を伝えている。このとき、以下の各問いに答えなさい。ただし、この鋼の剛性率を$G = 64$ GP¿とする。

（1）円筒の断面２次極モーメント I_p を求めなさい。

（2）円筒に働くトルク T を求めなさい。

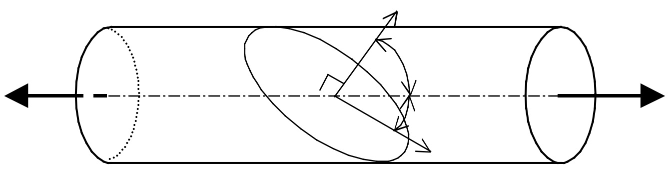
（3）円筒内の最大せん断応力τ_{max}を求めなさい。

４．長さ 1 m、一辺の長さが 1 cm の正方形断面を有するアルミ製の棒が、床に固定して垂直に立ててある。アルミのヤング率は E = 70GPa であり、重力の加速度は g = 9.8 m/s^2 としてよい。以下の各問いに答えなさい。

（1）この棒の頂点に 2 kgf の剛体を 4 cm の高さから落としたときに、棒に生じる衝撃荷重 P を求めなさい。

（2）静的に荷重を棒の頂点に付加したとき、棒の臨界座屈荷重 P_{cr} を求めなさい。

５．（戸谷先生の問題）



平成１６年度　材料力学中間試験

解答例

（１）力の釣り合いより、$R_A = R_B$、A 点回りのモーメントの釣り合いより、$M_A = -M + R_B\ell$

AC 間　$M_{x,AC} = -R_A x + M_A = -R_A x + R_A\ell - M$

$$\frac{d^2y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_{x,AC}}{EI} = \frac{1}{EI}(R_A x - R_A\ell + M)、\quad \frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^2}{2} - R_A\ell x + Mx\right)$$

$$y_{AC} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^3}{6} - \frac{R_A\ell x^2}{2} + \frac{Mx^2}{2}\right)$$

C 点でのたわみ角とたわみ

$$\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=a} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A a^2}{2} - R_A\ell a + Ma\right)、\quad \left.y_{AC}\right|_{x=a} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A a^3}{6} - \frac{R_A\ell a^2}{2} + \frac{Ma^2}{2}\right)$$

CB 間　$M_{x,CB} = R_B(\ell - x) = -R_A x + R_A\ell$

$$\frac{d^2y_{CB}}{dx^2} = -\frac{M_{x,CB}}{EI} = \frac{1}{EI}(R_A x - R_A\ell)、\quad \frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^2}{2} - R_A\ell x + C_1\right)$$

$$y_{CB} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^3}{6} - \frac{R_A\ell x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)$$

C 点でのはりの連続より、$C_1 = Ma$、$C_2 = \dfrac{Ma^2}{2}$ となる。よって、B 点でのたわみは

$$\delta = \left.y_{CB}\right|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A\ell^3}{6} - \frac{R_A\ell^3}{2} + Ma\ell + \frac{Ma^2}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A\ell^3}{3} + Ma\ell + \frac{Ma^2}{2}\right) = \frac{R_B}{k} = \frac{R_A}{k}$$

となる。よって、

$$\frac{Ma}{2}(2\ell + a) = \left(\frac{EI}{k} + \frac{\ell^3}{3}\right)R_A、\quad \therefore R_A = R_B = \frac{3kMa(2\ell + a)}{2(3EI + k\ell^3)}、\quad M_A = -M + \frac{3kMa(2\ell + a)}{2(3EI + k\ell^3)}$$

（２）ばねの法則より、$\delta = \dfrac{R_B}{k} = \dfrac{3Ma(2\ell + a)}{2(3EI + k\ell^3)}$

２．A点、B点での反力を R_A、R_B とすると、$R_A = R_B = \dfrac{P + w\ell}{2}$ であり、A点から x の位置での曲げモーメントは以下で与えられる。

$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2} = \frac{Px}{2} + \frac{w\ell x}{2} - \frac{wx^2}{2} = \frac{Px}{2} - \frac{w}{2}(x^2 - \ell x)$$

$$= \frac{Px}{2} - \frac{w}{2}\left(x^2 - \ell x + \frac{\ell^2}{4}\right) + \frac{w\ell^2}{8} = \frac{Px}{2} - \frac{w}{2}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{w\ell^2}{8}$$

よって、x の位置での曲げ応力σは、以下を満足しなければならない。

$$\sigma = \frac{M_x}{I}\frac{h}{2} = \frac{6}{bh^2}\left\{\frac{Px}{2} - \frac{w}{2}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{w\ell^2}{8}\right\} < \sigma_a$$

従って、以下の解を得る。

$$b > \frac{6}{\sigma_a h^2}\left\{\frac{Px}{2} - \frac{w}{2}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{w\ell^2}{8}\right\}$$

３．

（１）半径を r とすると、

$$I_p = \int_{R-t}^{R} r^2 dA = 2\pi \int_{R-t}^{R} r^3 dr = \frac{\pi\{R^4 - (R-t)^4\}}{2} = \frac{\pi\{0.5^4 - (0.5-0.2)^4\}}{2}\,\mathrm{m}^4 = 0.0854\,\mathrm{m}^4$$

偶力を F、外半径を R、比ねじれ角をθ、仕事を W とすると、 $FR\theta = T\theta = W$ より、時間で微分して、

$$T\frac{d\theta}{dt} = \frac{dW}{dt}、\therefore T\omega = P$$

となる。ここで、P は仕事率である。よって、トルクは以下のようになる。

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{20000 \times 75 \times 9.8}{5000 \times 2\pi / 60}\,\mathrm{N\ m} = 2.81 \times 10^4\ \mathrm{N\ m}$$

（２） $T = \int_{R-t}^{R} \tau r dA = \frac{\tau_{\max}}{R}\int_{R-t}^{R} r^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{R} I_p$ より、

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{2.81 \times 10^4 \times 0.5}{0.0854} = 1.65 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 0.165\mathrm{MP}$$

４．

（１） 棒の断面積を A、長さをℓ、縮みをλ、剛体の重量を W、落下高さを h とすると、 $W(h+\lambda) = \frac{1}{2}P\lambda$、

$\lambda = \frac{P\ell}{AE}$ より、 $P^2 - 2WP - \frac{2WAEh}{\ell} = 0$ であるから、

$$P = W + \sqrt{W^2 + \frac{2WAEh}{\ell}} = W\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2AE}{W}\frac{h}{\ell}}\right\}$$

$$= 2 \times 9.8\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.01^2 \times 70 \times 10^9}{2 \times 9.8} \times \frac{0.04}{1}}\right\}$$

3.33kN

（２）床からの高さを x、座屈によるたわみを y とすると、x の位置での曲げモーメントは、

$$M_x = P(\delta - y)$$

となる。ここで、δ は着力点のたわみである。たわみの式より、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y + \frac{P}{EI}\delta$$

において、

$$y = A\cos kx + B\sin kx + C$$

とおくと、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2(A\cos kx + B\sin kx) = -k^2(y - C) = -k^2 y + k^2 C$$

となるから、

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}、C = \delta$$

を得る。また、 $x = 0$ のとき、 $y = 0$ であるから $A + C = 0$ であり、 $dy/dx = 0$ より $B = 0$ である。
よって、

$$y = \delta - \delta\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

さらに、$x = \ell$で　　　　　　　　　　$y = \delta$であるから、

$$\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 0、\quad \therefore \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となり、最小の臨界座屈荷重は、$n = 1$のときに得られ、以下のようになる。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{48\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 70 \times 10^9 \times 0.01^4}{48 \times 1^2} \quad 144\mathrm{N}$$