材料力学解答例　第２回

問題２－１

（２）

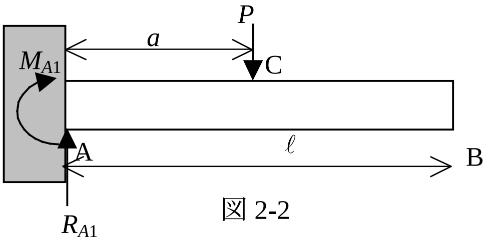

図 2-2

図２－２の場合、Ａ 点の反力 $R_{A1}$、固定モーメント $M_{A1}$ は

$$R_{A1} = P \text{、} M_{A1} = -Pa$$

であり、AC 間のせん断力 $S_{x1,AC}$、曲げモーメント $M_{x1,AC}$ は

$$S_{x1,AC} = P$$

$$M_{x1,AC} = Px + M_{A1} = Px - Pa$$

となる。従って、たわみ $y_{1,AC}$ とすると、A 点でたわみ角、たわみが０であることを考慮して、

$$EI\frac{d^2 y_{1,AC}}{dx^2} = -M_{x1,AC} = -Px + Pa$$

$$EI\frac{dy_{1,AC}}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + Pax$$

$$EIy_{1,AC} = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Pax^2}{2}$$

を得る。

次にＣＢ間を考えると、せん断力も曲げモーメントも０、すなわち、

$$S_{x1,CB} = 0 \text{、} M_{x1,CB} = 0$$

であるから、たわみ $y_{1,CB}$ について、

$$EI\frac{d^2 y_{1,CB}}{dx^2} = -M_{x1,CB} = 0$$

$$EI\frac{dy_{1,CB}}{dx} = C_3$$

$$EIy_{1,CB} = C_3 x + C_4$$

となる。C点でのはりの連続から、

$$C_3 = -\frac{Pa^2}{2} + Pa^2 = \frac{Pa^2}{2}$$

$$C_3 a + C_4 = \frac{Pa^3}{2} + C_4 = -\frac{Pa^3}{6} + \frac{Pa^3}{2} \text{、} \therefore C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

を得る。これらより、CB間の任意の位置のたわみ角 $dy_{1,\mathrm{CB}}/dx$、たわみ $y_{1,\mathrm{CB}}$ の式に代入すればよい。よって、B点でのたわみ角 $i_1$、たわみ$\delta_1$は、

$$i_1 = \left.\frac{dy_{1,CB}}{dx}\right|_{x=\ell} = \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_1 = y_{1,CB}\Big|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa^2\ell}{2} - \frac{Pa^3}{6}\right)$$

となる。

図２－３の場合、A 点での反力 $R_{A2}$、固定モーメント $M_{A2}$ は

$$R_{A2} = -R_B$$

$$M_{A2} = R_B \ell$$

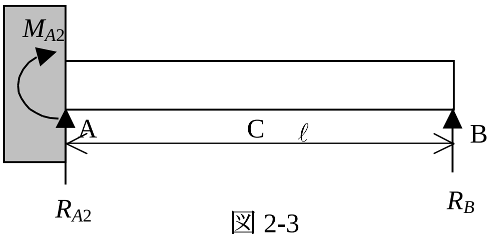

図 2-3

また、A点から $x$ の位置でのせん断力 $S_{x2}$、曲げモーメント $M_{x2}$ は

$$S_{x2} = -R_B \text{、} M_{x2} = -R_B x + R_B \ell$$

であるから、たわみ $y_2$ は、

$$EI\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -M_{x1,AC} = R_B x - P\ell$$

$$EI\frac{dy_2}{dx} = \frac{R_B x^2}{2} - P\ell x$$

$$EIy_2 = \frac{R_B x^3}{6} - \frac{P\ell x^2}{2}$$

であるから、B点でのたわみ角 $i_2$、たわみ$\delta_2$は、

$$i_2 = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_B \ell^2}{2} - P\ell^2\right)$$

$$\delta_2 = \left. y_2 \right|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_B \ell^3}{6} - \frac{P\ell^3}{2}\right)$$

となる。

図２－４において、Ａ点の反力 $R_{A3}$、固定モーメント $M_{A3}$ は、

$$R_{A3} = 0$$

$$M_{A3} = M_B$$

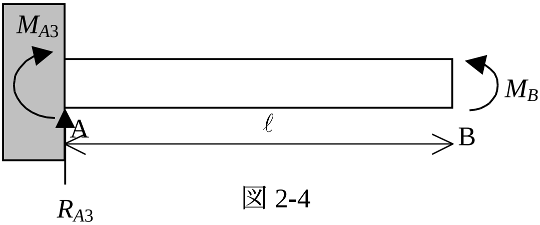


図 2-4

であるから、Ａ点から $x$ の位置でのせん断力 $S_{x3}$、曲げモーメント $M_{x3}$ は、

$$S_{x3} = 0、\ M_{x3} = M_B$$

である。従って、たわみ $y_3$ について、A 点でたわみ角、たわみが０であることから、

$$EI\frac{d^2 y_3}{dx^2} = -M_{x3} = -M_B$$

$$EI\frac{dy_3}{dx} = -M_B x$$

$$EIy_3 = -\frac{M_B x^2}{2}$$

であり、Ｂ点でのたわみ角 $i_3$ とたわみ $\delta_3$ は、

$$i_3 = \left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{x=\ell} = -\frac{M_B \ell}{EI}$$

$$\delta_3 = \left. y_3 \right|_{x=\ell} = -\frac{M_B \ell^2}{2EI}$$

である。

以上の結果を用いると、両端固定支持はりでは、Ｂ点でのたわみ角 $i_B$ が０

であることから、

$$i_B = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa^2}{2} + \frac{R_B\ell^2}{2} - P\ell^2 - M_B\ell\right) = 0$$

より、

$$\frac{Pa^2}{2} + \frac{R_B\ell^2}{2} - P\ell^2 - M_B\ell = 0$$

また、Ｂ点でのたわみ$\delta_B$も０であるから、

$$\delta_B = \delta_2 + \delta_3 = \delta_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa^2\ell}{2} - \frac{Pa^3}{6} + \frac{R_B\ell^3}{6} - \frac{P\ell^3}{2} - \frac{M_B\ell^2}{2}\right) = 0$$

より、

$$\frac{Pa^2\ell}{2} - \frac{Pa^3}{6} + \frac{R_B\ell^3}{6} - \frac{P\ell^3}{2} - \frac{M_B\ell^2}{2} = 0$$

となる。これらより、

$$M_B = \frac{Pa^2}{2\ell} + \frac{R_B\ell}{2} - P\ell = \frac{Pa^2}{\ell} - \frac{Pa^3}{3\ell^2} + \frac{R_B\ell}{3} - P\ell$$

である。よって、

$$\frac{R_B\ell}{6} = \frac{Pa^2}{2\ell} - \frac{Pa^3}{3\ell^2}, \qquad R_B = P\left(\frac{3a^2}{\ell^2} - \frac{2a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_B = \frac{Pa^2}{2\ell} + \frac{P\ell}{2}\left(\frac{3a^2}{\ell^2} - \frac{2a^3}{\ell^3}\right) - P\ell = -\frac{P\ell}{2}\left(1 - 2\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

を得る。以上より、問題２－１（１）で考えたはりの自由体の力とつりあいの結果をもちいて、

$$R_A = P - R_B = P\left(1 - \frac{3a^2}{\ell^2} + \frac{2a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_A = M_B - Pa + R_B \ell$$

$$= -\frac{P\ell}{2}\left(1 - 2\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right) - \frac{P\ell}{2}\frac{2a}{\ell} + \frac{P\ell}{2}\left(6\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{4a^3}{\ell^3}\right)$$

$$= -\frac{P\ell}{2}\left(1 + \frac{2a}{\ell} - 8\frac{a^2}{\ell^2} + 6\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

である。

また、はりの断面に働くせん断力 $S_x$、曲げモーメント $M_x$、たわみ角 i、たわみ y は

ＡＣ間

$$S_x = S_{x1,AC} + S_{x2} + S_{x3}$$
$$M_x = M_{x1,AC} + S_{x2} + S_{x3}$$
$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{dy_{1,AC}}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx}$$
$$y = y_{1,AC} + y_2 + y_3$$

ＣＢ間

$$S_x = S_{x1,CB} + S_{x2} + S_{x3}$$
$$M_x = M_{x1,CB} + S_{x2} + S_{x3}$$
$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{dy_{1,CB}}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx}$$
$$y = y_{1,CB} + y_2 + y_3$$

にこれまで求めた式を代入して求めればよい。

問題２－２.

図２－５において、左右対称であるから、

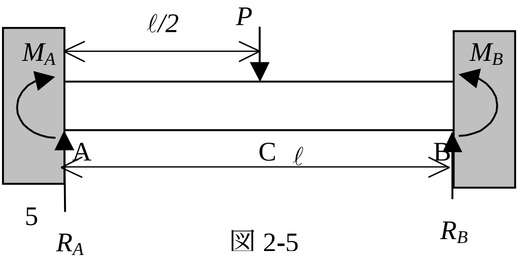


図 2-5

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$M_A = M_B$$

となる。また、Aから $x$ の位置において、断面に働くせん断力 $S_x$、曲げモーメント $M_x$ は、

$$S_x = R_A = \frac{P}{2} \text{、} \quad M_x = R_A x + M_A = \frac{P}{2}x + M_A$$

である。これより、A 点でたわみ角、たわみが０であることを考慮して、

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -\frac{P}{2}x - M_A$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} - M_A x$$

$$EIy = -\frac{Px^3}{12} - \frac{M_A x^2}{2}$$

となる。左右対称より、中央のC点が最大たわみとなり、たわみ角０より

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}} = -\frac{P\ell^2}{16} - \frac{M_A \ell}{2} = 0 \text{、} \quad \therefore M_A = M_B = -\frac{P\ell}{8}$$

であり、ＡＣ間では、たわみ角 $i$ とたわみ $y$ は、

$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{P}{8EI}x(\ell - 2x)$$

$$y = -\frac{Px^3}{12} + \frac{P\ell x^2}{16} = \frac{P}{48}x^2(3\ell - 4x)$$

となるから、Ｃ点でのたわみは、

$$\delta = y\big|_{x=\frac{\ell}{2}} = \frac{P\ell^2}{48EI \times 4}\left(3\ell - \frac{4\ell}{2}\right) = \frac{P\ell^3}{192EI}$$

である。

問題２－３

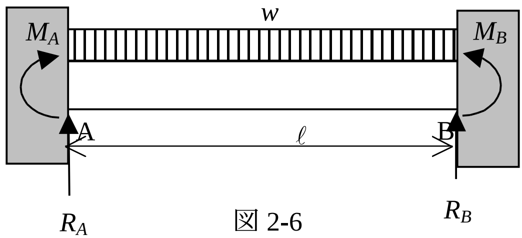

図 2-6

図２－６において、左右対称より、

$$R_A = R_B = \frac{w\ell}{2}$$

$$M_A = M_B$$

であるから、A点からｘの位置におけるせん断力 $S_x$ と曲げモーメント $M_x$ は、それぞれ、

$$S_x = R_A - wx$$

$$M_x = M_A + R_A x - \frac{wx^2}{2} = -\frac{wx^2}{2} + \frac{w\ell x}{2} + M_A$$

であり、たわみは、A 点でたわみ角 $i$、たわみ $y$ が０であることを考慮して、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^2}{2} - \frac{w\ell x}{2} - M_A\right)$$

$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^3}{6} - \frac{w\ell x^2}{4} - M_A x\right)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^4}{24} - \frac{w\ell x^3}{12} - \frac{M_A x^2}{2}\right)$$

ここで、左右対称より、はりの中央でたわみが最大となり、たわみ角は０であるから、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{EI}\left(\frac{w\ell^3}{48} - \frac{w\ell^3}{16} - \frac{M_A \ell}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w\ell^3}{24} - \frac{M_A \ell}{2}\right) = 0$$

より、

$$M_A = M_B = -\frac{w\ell^3}{12}$$

また、AC 間でのたわみ角とたわみは、

$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{w}{12EI} x(2x^2 - 3\ell x + \ell^2) = \frac{w}{12EI} x(x-\ell)(2x-\ell)$$

$$y = \frac{w}{24EI} x^2(x^2 - 2\ell x + \ell^2) = \frac{w}{24EI} x^2(x-\ell)^2$$

となる。以上より、はりの中央でのたわみは、

$$\delta = y\Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = \frac{w\ell^4}{384EI}$$

となる。

問題３－１

（１）

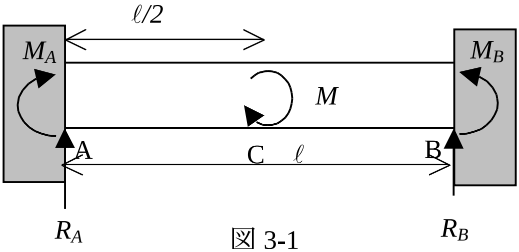


図 3-1

図３－１において、

$$R_A + R_B = 0$$

$$M_A = M_B - M + R_B \ell$$

である。

（２）

AC 間で、A 点から $x$ の位置において、はりの断面に働くせん断応力 $S_{x,AC}$、曲げモーメント $M_{x,AC}$ は、

$$S_{x,AC} = R_A、\quad M_{x,AC} = R_A x + M_A$$

より、AC 間のたわみ角 $i_{AC}$、たわみ $y_{AC}$ が A 点で０であることを考慮して、

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_{x,AC}}{EI} = \frac{1}{EI}(-R_A x - M_A)$$

$$i_{AC} \approx \frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A x^2}{2} - M_A x\right)$$

$$y_{AC} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2}\right)$$

となる。ここで、C 点を中心として、たわみが左右反対称になることに注意

すると、C 点でのたわみは 0 となるから、

$$y_{AC}\Big|_{x=\frac{\ell}{2}}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A\ell^3}{48}-\frac{M_A\ell^2}{8}\right)=0$$

より、

$$M_A=-\frac{R_A\ell}{6}$$

である。従って、AC 間のたわみ角とたわみは、$R_A$ を用いて、

$$i_{AC}\approx\frac{dy_{AC}}{dx}=\frac{R_A}{6EI}x(\ell-3x)$$

$$y_{AC}=\frac{R_A}{12EI}x^2(\ell-2x)$$

　CB 間でのせん断力 $S_{x,CB}$ と曲げモーメント $M_{x,CB}$ は、

$$S_{x,CB}=R_A\text{、}\ M_{x,CB}=R_Ax+M_A+M=R_Ax-\frac{R_A\ell}{6}+M$$

であるから、

$$\frac{d^2y_{CB}}{dx^2}=-\frac{M_{x,CB}}{EI}=\frac{1}{EI}\left(-R_Ax+\frac{R_A\ell}{6}-M\right)$$

$$i_{CB}\approx\frac{dy_{CB}}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_Ax}{6}(\ell-3x)-Mx\right)+C_3$$

$$y_{CB}=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_Ax^2}{12}(\ell-2x)-\frac{Mx^2}{2}\right)+C_3x+C_4$$

である。C 点でのはりの連続から

$$\frac{dy_{AC}}{dx}\bigg|_{x=\frac{\ell}{2}}=\frac{dy_{CB}}{dx}\bigg|_{x=\frac{\ell}{2}}$$

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A\ell^2}{24}\right)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A\ell^2}{24}-\frac{M\ell}{2}\right)+C_3$$

$$\therefore C_3 = \frac{M\ell}{2EI}$$

であり、

$$y_{AC}\Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = y_{CB}\Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{R_A \ell^2}{12\times 4}(\ell - 2\times\frac{\ell}{2}) - \frac{M\ell^2}{8}\right) + \frac{M\ell}{2EI}\frac{\ell}{2} + C_4 = 0$$

$$\therefore C_4 = -\frac{M\ell^2}{8EI}$$

である。これより、CB 間のたわみ角とたわみは

$$i_{CB} \approx \frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x}{6}(\ell - 3x) - Mx\right) + \frac{M\ell}{2EI}$$

$$y_{CB} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^2}{12}(\ell - 2x) - \frac{Mx^2}{2}\right) + \frac{M\ell}{2EI}x - \frac{M\ell^2}{8EI}$$

を得る。B 点でのたわみ角、たわみは０であるから、

$$i_{CB}\Big|_{x=\ell} \approx \frac{dy_{CB}}{dx}\Big|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A \ell^2}{3} - M\ell\right) + \frac{M\ell}{2EI} = 0$$

$$y_{CB}\Big|_{x=\ell} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A \ell^3}{12} - \frac{M\ell^2}{2}\right) + \frac{M\ell^2}{2EI} - \frac{M\ell^2}{8EI} = 0$$

のいずれからも、

$$R_A = -\frac{3M}{2\ell}$$

を得る。以上のことから、

$$R_B = -R_A = \frac{3M}{2\ell}$$

$$M_A = -\frac{R_A \ell}{6} = \frac{M}{4}$$

$$M_B = M_A + M - R_B\ell = \frac{M}{4} + M - \frac{3M}{2} = -\frac{M}{4}$$

となる。

（３）以上の結果を用いると、C 点でのたわみ角とたわみは、

$$i_C \approx \left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}} = -\frac{3M}{2\ell\times 6EI}\frac{\ell}{2}(\ell - \frac{3\ell}{2}) = \frac{M\ell}{8EI}$$

$$\delta_C = y_{AC}\big|_{x=\frac{\ell}{2}} = 0$$

となる。

問題３－２.

【別解】

図３－２の不静定問題は、問題２－２と問題３－１の解を足し合わせることで解ける。

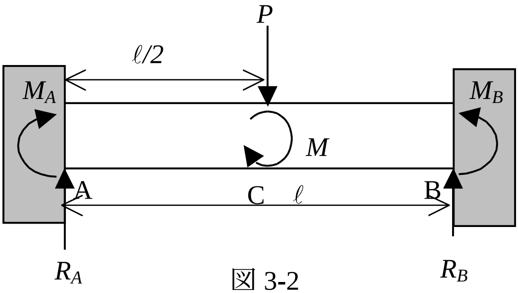


図 3-2

図 2-5 において、

$$R_{A1} = R_{B1} = \frac{P}{2}$$

$$M_{A1} = M_{B1} = -\frac{P\ell}{8}$$

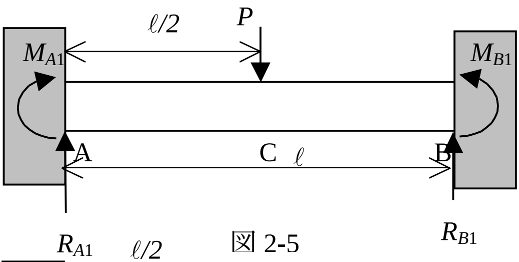


図 2-5

であり、図 3-1 において、

$$R_{B2} = -R_{A2} = \frac{3M}{2\ell}$$

$$M_{A2} = -M_{B2} = \frac{M}{4}$$

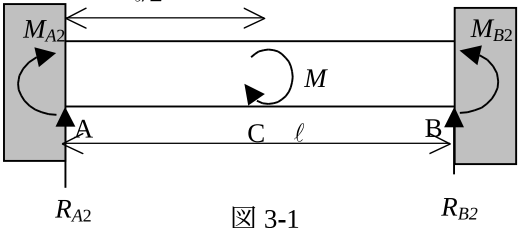


図 3-1

であるから、図 3-2 において

$$R_A = R_{A1} + R_{A2} = \frac{P}{2} - \frac{3M}{2\ell}、\ R_B = R_{B1} + R_{B2} = \frac{P}{2} + \frac{3M}{2\ell}$$

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} = -\frac{P\ell}{8} + \frac{M}{4}、\ M_B = M_{B1} + M_{B2} = -\frac{P\ell}{8} - \frac{M}{4}$$

を得る。また、図 2-5 の C 点でのたわみ角とたわみを $i_{C1}$、$\delta_{C1}$ とし、図 3-1 の C 点でのたわみ角とたわみを $i_{C2}$、$\delta_{C2}$ とすると、図 3-2 では、

$$i_C = i_{C1} + i_{C2} = \frac{M\ell}{8EI}、\ \delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} = \frac{P\ell^3}{192EI}$$

となる。