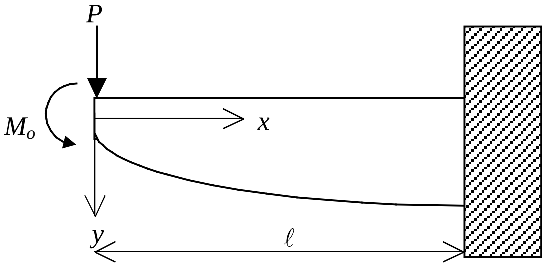
材力解答例　第３回



問題４―２.

（１）x の位置において、はりの断面に作用するせん断力 S_x と曲げモーメント M_x はそれぞれ

$$S_x = -P、\quad M_x = -Px - M_o$$

となる。

（２）x の位置でのはりの高さを h とすると、断面２次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

であるから、最大曲げ応力は

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_x}{I}\frac{h}{2} = \frac{6(Px + M_o)}{bh^2} = 一定$$

となるので、

$$h = \sqrt{\frac{6(Px + M_o)}{b\sigma_{\max}}}$$

である。自由端での高さは、上式に $x=0$ を代入して、以下のようになる。

$$h_o = \sqrt{\frac{6M_o}{b\sigma_{\max}}}$$

（３）（２）の結果より、断面２次モーメントは、

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{b}{12}\left\{\frac{6(Px + M_o)}{b\sigma_{\max}}\right\}^{3/2}$$

であるから、たわみの式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{Px + M_o}{E\frac{b}{12}\left\{\frac{6(Px + M_o)}{b\sigma_{max}}\right\}^{3/2}} = \frac{2b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}\sqrt{x + M_o/P}}$$

となる。これより、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\sqrt{x + M_o/P} + C_1$$

$$y = \frac{8b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{3E\sqrt{6P}}(x + M_o/P)^{3/2} + C_1 x + C_2$$

を得る。固定端でたわみ角、たわみは０なので、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\ell} = \frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\sqrt{\ell + M_o/P} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\sqrt{\ell + M_o/P}$$

$$\left.y\right|_{x=\ell} = \frac{8b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{3E\sqrt{6P}}(\ell + M_o/P)^{3/2} - \frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\sqrt{\ell + M_o/P}\,\ell + C_2$$

$$C_2 = -\frac{8b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{3E\sqrt{6P}}(\ell + M_o/P)^{3/2} + \frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\sqrt{\ell + M_o/P}\,\ell$$

$$= \frac{8b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{3E\sqrt{6P}}\sqrt{\ell + \frac{M_o}{P}}\left(\frac{5\ell}{2} + \frac{M_o}{P}\right)$$

となるから、

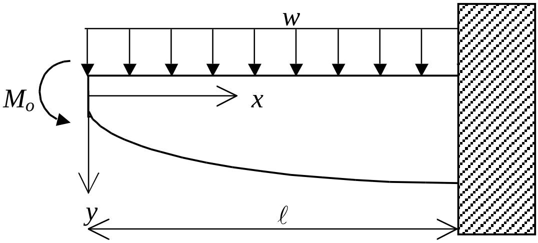
$$i \approx \frac{dy}{dx} = \frac{4b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{E\sqrt{6P}}\left(\sqrt{x + \frac{M_o}{P}} - \sqrt{\ell + \frac{M_o}{P}}\right)$$

$$y = \frac{8b^{1/2}\sigma_{max}^{3/2}}{3E\sqrt{6P}}\left\{\left(x + \frac{M_o}{P}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{\ell + \frac{M_o}{P}}\,x + \sqrt{\ell + \frac{M_o}{P}}\left(\frac{5\ell}{2} + \frac{M_o}{P}\right)\right\}$$

となる。

問題４—３.

（１）x の位置ではりの断面に作用するせん断力 S_x、曲げモーメント M_x は、それぞれ、



$$S_x = -wx$$

$$M_x = -\frac{wx^2}{2} - M_o$$

となる。

（２）（１）の結果より、x の位置での最大曲げ応力は

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_x}{I}\frac{h}{2} = \frac{3(wx^2 + 2M_0)}{bh^2} = 一定$$

であるので、

$$h = \sqrt{\frac{3(wx^2 + 2M_0)}{b\sigma_{\max}}}$$

である。

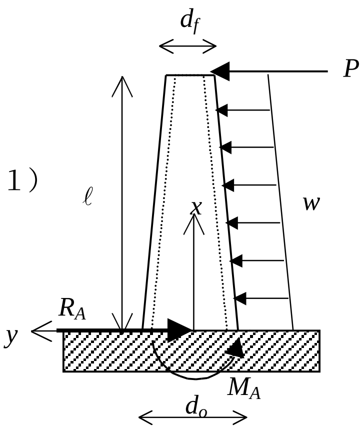
問題４—４.

（１）$d = d_o - \dfrac{d_o - d_f}{\ell}x$

（２）以後、計算を簡単にするため、（１）結果より、

$$d = -a(x - b)$$

とする。ただし、



$$a = \frac{d_o - d_f}{\ell}、\ b = \frac{\ell d_o}{d_o - d_f}$$

である。これより、断面２次モーメントは、

$$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi(d-2t)^4}{64} = \frac{\pi}{64}[d^4 - \{d^4 - 4d^3(2t) + 6d^2(2t)^2 - 4d(2t)^2 + (2t)^4\}]$$

$$\approx \frac{\pi d^3 t}{8}$$

と近似できる。

（３）左の下の図のように、固定端での反力を R_A、モーメントを M_A を決めると、

$$R_A = w\ell + P、\ M_A = -\frac{w\ell^2}{2} - P\ell$$

より、x の位置での曲げモーメント M_x は、

$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2} + M_A = -\frac{w}{2}(\ell - x)^2 - P(\ell - x)$$

である。よって、以下を得る。

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_x}{I}\frac{d}{2} \approx \frac{\frac{w}{2}(\ell - x)^2 + P(\ell - x)}{\frac{\pi d^3 t}{8}}\frac{d}{2} = \frac{2w(\ell - x)^2 + 4P(\ell - x)}{\pi d^2 t}$$

（４）最大引張の曲げ応力が許容応力を満たすためには、

$$\sigma_{\max} \approx \frac{2w(\ell - x)^2 + 4P(\ell - x)}{\pi d^2 t} \le \frac{\sigma_B}{4}$$

より、肉厚に関して、以下の条件が要求される。

$$t \ge \frac{8w(\ell - x)^2 + 16P(\ell - x)}{\pi d^2 \sigma_B}$$