材料力学　演習問題

４－１．長さ３　m、断面の幅 5 cm、厚さ 0.5 cm の鋼製の板がある。鋼のヤング率は 200GPa である。このとき、以下の各問いに答えなさい。

（１）　板の両端が固定され、板の中央に 200 N の荷重が付加された時、荷重の作用点に生じるたわみδと最大曲げ応力σ_{max}を求めなさい。ただし、荷重の付加方向は、板の厚さ方向とする。

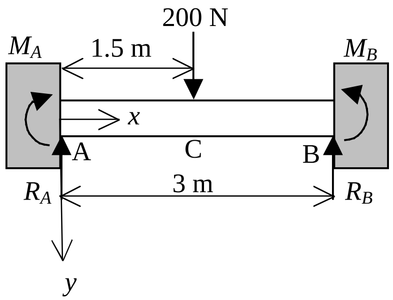
（２）　板の両端が回転支持のとき、臨界座屈荷重 P_{cr}、臨界座屈応力σ_{cr}を求めなさい。

（３）　板の一端が壁に固定され、他端のたわみと回転が自由なときの臨界座屈荷重 P_{cr}、臨界座屈応力σ_{cr}を求めなさい。

（４）　板の両端が固定されているときの臨界座屈荷重 P_{cr}、臨界座屈応力σ_{cr}を求めなさい。

解答例

（１）配布した問題では荷重が 200kN であったが、ここでは 200N で解く。



　左右対称であるから、反力は

$$R_A = R_B = 100 \text{ N}$$

であり、固定モーメントは

$$M_A = M_B$$

である。従って、A 点から x の位置においてはりの断面に働く曲げモーメントは、

$$M_x = M_A + R_A x$$

である。たわみの式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}(M_A + R_A x)$$

となる。A 点で固定されているので、$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_A x + \frac{R_A x^2}{2}\right)$$

となる。C 点では最大たわみとなるから、はりの全長を $L = 2l$ とすると

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = -\frac{6}{625}\left(M_A l + \frac{R_A l^2}{2}\right) = 0$$

より、

$$M_A = -\frac{R_A l}{2} = -75\ [\mathrm{N\ \ m}]$$

である。また、たわみについても固定端 A 点で０であるから

$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6}\right) = \frac{R_A}{12EI}x^2(3l - 2x)$$

となるから、C点でのたわみδは

$$\delta = y\Big|_{x=l} = \frac{R_A l^3}{12EI}$$

となる。ここで、断面２次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

であるから、結局

$$\delta = \frac{R_A l^3}{Ebh^3} = \frac{(100\mathrm{N}) \times (1.5\mathrm{m})^3}{(200\times 10^9\ \mathrm{Pa}) \times (0.05\mathrm{m}) \times (0.005\mathrm{m})^3} = 0.27\ [\mathrm{m}]$$

となる。また、曲げモーメントは

$$M_x = M_A + R_A x = R_A\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

より、最大となるのは、$x = 0$、$x = l$ および、左右対称であることから、$x = 2l$ のときであり、その絶対値は

$$|M_{\max}| = \frac{R_A l}{2}$$

である。よって、最大の曲げ応力は $x = 0$、$x = l$ および $x = 2l$ のとき

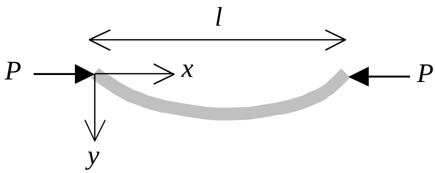
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{I}\frac{h}{2} = \frac{3R_A l}{bh^2} = 360\ \mathrm{MPa}$$

となる。

（２）曲げモーメントは

$$M_x = Py$$

であるので、たわみの式は



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y$$

$y = e^{sx}$ とおくと、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \left(s^2 + \frac{P}{EI}\right)e^{sx} = 0$$

$e^{sx} \neq 0$ なので、

$$s^2 + \frac{P}{EI} = \left(s + i\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)\left(s - i\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) = 0$$

より、一般解は

$$y = c_1 e^{i\sqrt{\frac{P}{EI}}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x} = C_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

となる。ここで、境界条件より、棒の長さを l とすると、

$$y\big|_{x=0} = C_1 = 0$$

$$y\big|_{x=L} = C_2 \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0$$

であり、 $C_2 \neq 0$ なので

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi、\ n = 1,2,\cdots$$

を得る。臨界座屈荷重は、 $n=1$ であり、かつ断面２次モーメントが最小のときにえられ、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{12l^2} = 114\ [\mathrm{N}$$

であり、座屈応力は

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 Eh^2}{12l^2} = 0.457\ [\mathrm{MPa}]$$

となる。

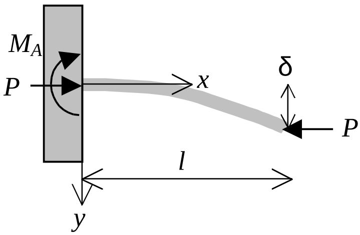
（3）荷重の作用点でのたわみをδとすると、固定端でのモーメント M_A は、

$$M_A = -P\delta$$

となるから、x の位置での曲げモーメントは

$$M_x = Py - P\delta$$

で与えられ、たわみの式より



$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}\delta$$

となる。これの解は

$$y = c_1 e^{i\sqrt{\frac{P}{EI}}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x} + \delta$$

$$= C_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x + \delta$$

で与えられる。棒は壁で固定されているので、

$$y\Big|_{x=0} = C_1 + \delta = 0 、\therefore C_1 = -\delta$$

$$\frac{dy}{dx}\Bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{P}{EI}}C_2 = 0$$

だから、

$$y = \delta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

となる。荷重の作用点でのたわみはδであるから、

$$y\Big|_{x=l} = \delta\left(1-\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right)=\delta$$

より

$$\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}L=0、\ \therefore\ \sqrt{\frac{P}{EI}}L=\frac{(2n-1)\pi}{2}、\quad n=1,2,\cdots$$

を得る。臨界座屈荷重は、 $n=1$であり、かつ断面２次モーメントが最小のときにえられ、

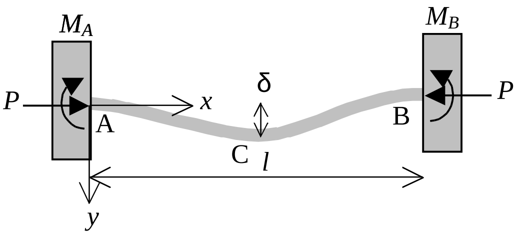
$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4l^2}=\frac{\pi^2 Ebh^3}{48l^2}=28.6\ [\mathrm{N}]$$

であり、座屈応力は

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 Eh^2}{48l^2}=0.114\ [\mathrm{MPa}]$$

となる。

（３）A 点、B 点でのモーメントをそれぞれ M_A、M_B とすると、x の位置で棒の断面に作用する曲げモーメント　M_x は、



$$M_x = M_A + Py$$

より、たわみの式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M_x}{EI}=-\frac{M_A}{EI}-\frac{P}{EI}y$$

となる。ここで

$$y=C_1\cos kx+C_2 \sin kx+\varphi$$

とおく。ただし、C_1、C_2、φは定数である。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)=-k^2(y-\varphi)$$

なので、たわみの式の最右辺と比較すると、

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$k^2\varphi = \frac{P}{EI}\varphi = -\frac{M_A}{EI}、\ \varphi = -\frac{M_A}{P}$$

より、

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x - \frac{M_A}{P}$$

となる。A 点で固定されているので、

$$y\Big|_{x=0} = C_1 - \frac{M_A}{P} = 0、\ \therefore C_1 = \frac{M_A}{P}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{P}{EI}}C_2 = 0、\ \therefore C_2 = 0$$

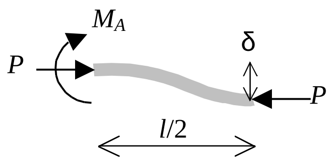
となり、

$$y = -\frac{M_A}{P}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

はりの中央で最大たわみとなるので、

$$M_A = -P\delta$$

であり、左右対称の場合を考えているので



$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\frac{l}{2}} = \delta\sqrt{\frac{P}{EI}}sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{l}{2} = 0$$

より、

$$sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{l}{2} = 0、\ \therefore \sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{l}{2} = n\pi、\ n = 1,2,3,\cdots$$

となる。よって座屈荷重は

$$P = \frac{4n^2\pi^2 EI}{l}$$

で与えられ、臨界座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l}$$

となる。これは（２）の場合の４倍になる。