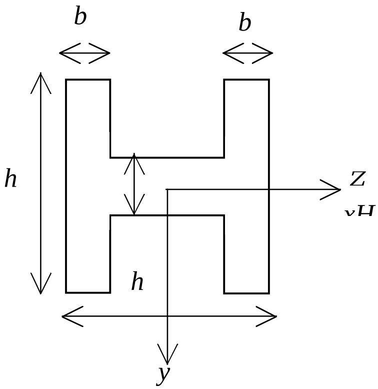
４－２．図１に示すような断面形状を有するＨ鋼がある。このとき、以下の各問いに答えなさい。




（１）　図心を通る $z$ 軸周りの断面二次モーメント $I_z$ を求めなさい。

（２）　図心を通る $y$ 軸周りの断面二次モーメント $I_y$ を求めなさい。

（３）　$I_z$ と $I_y$ が同じになるような、$b$ と $w$ の比を求めなさい。

（４）　（３）の条件を満たす長さ $\ell$ のＨ鋼の両端が固定されている場合の臨界座屈荷重 $P_{cr}$ を求めなさい。

（５）　高さ 3 m、荷重 100 t の天井を、Ｈ鋼（$h=100$ $mm$, $w=10$ $mm$）を用いて支えたい。ただしＨ鋼の平行板厚 $t$ は（３）の条件を満たす。一本のＨ鋼支柱には垂直荷重のみが作用するものと仮定して、座屈が起こらないようなＨ鋼支柱の本数を求めなさい。

解答例

（１）（２）

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 h dy - 2\int_{w/2}^{h/2} y^2 (h-2b)\,dy \\
&= \frac{h^4}{12} - \frac{(h-2b)(h^3-w^3)}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_y &= \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 h dz - 2\int_{-h/2+b}^{h/2-b} y^2 (h-w)\,dy \\
&= \frac{h^4}{12} - \frac{(h-2b)^3 (h-w)}{12}
\end{aligned}
$$

（３）（１）、（２）の結果より

$$(h-2b)(h^3-w^3)=(h-2b)^3(h-w)$$

であるから、

$$b=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h^3-w^3}{h-w}}=\frac{h}{2}\pm\frac{h}{2}\sqrt{1+\frac{w}{h}+\left(\frac{w}{h}\right)^2}$$

を得る。ここで、

$$\sqrt{1+\frac{w}{h}+\left(\frac{w}{h}\right)^2}>1$$

であるので、$w>0$のとき、

$$b<0、\ b>h$$

となり、$b$ の大きさは負か、断面の長さを越えてしまう。よって、

$$w=0$$

の場合しかありえないから

$$\frac{w}{b}=0$$

となる。つまり、この場合、断面に中空があるようなはりは $y$、$z$ 軸周りの断面２次モーメントは一致しない。

（４）（３）の結果より、$h\times h$ の断面を有するはりの座屈問題を考えればよい。

　両端を固定された長さ l のはりが座屈した際に、中央の点でのたわみをδとすると、

$$M_x=Py-P\delta$$

であり、たわみの式から、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M_x}{EI}=-\frac{P}{EI}y+\frac{P}{EI}\delta$$

である。固定端（x ＝ 0）では、たわみ、たわみ角が０であるから、

$$y = \delta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,y\right)$$

であり、はりの中央で最大たわみとなることから

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}} = \delta\sqrt{\frac{P}{EI}}\,sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{l}{2} = 0$$

となり、

$$sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{l}{2} = 0、\ \therefore\ \sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{l}{2} = n\pi、\ n = 1,2,3,\cdots$$

を得る。これより、臨界座屈荷重は、

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

であり、断面２次モーメント

$$I = \frac{h^4}{12}$$

を代入すると、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Eh^4}{3l^2}$$

となる。

（４）柱を $N$ 本、天井の重さを $W$ とすると、座屈が生じないためには

$$NP_{cr} > W$$

より、

$$N > \frac{W}{P_{cr}} = \frac{3Wl^2}{\pi^2 Eh^4} = \frac{3 \times (100000 \times 9.8N) \times (3m)^2}{\pi^2 \times (206 \times 10^9 Pa) \times (0.1m)^4} = 0.008133$$

であり、１本で良い。

４－３．以下の各問いに答えなさい。

（１） 等方弾性体においては、$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ であることを証明しなさい。

（２） 直径 10 cm の丸棒の断面極２次モーメント $I_p$、ならびに図心を通る $x$ 軸周りの断面２次モーメント $I_x$ を求めなさい。

（３） 長さ 3 m、外径 10 cm、肉厚 8 mm の鋼製のパイプがある。トルク $T = 200$ kN m が付加された時の比ねじれ角、ねじれ角ならびに外表面のせん断応力τを求めよ。ただし、鋼の剛性率 $G = 140$ GPa とする。

（４） （３）の鋼製パイプを駆動軸として回転させる。鋼のせん断破壊強度は $\tau_B = 300$ GPa であり、これを基準として安全率を $S = 4$ として許容応力 $\tau_a$ を設計したい。許容される回転数は何 rpm となるか求めなさい。

【解答例】

（１）省略

（２）断面２次極モーメントは、直径を $D$ とすると以下のようになる。

$$I_p = \int_A r^2 dA = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi D^4}{32} = 9.82 \times 10^{-6} \ [\mathrm{m}^4]$$

ここで、

$$r^2 = x^2 + y^2$$

であり、

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y$$

形状が図芯のまわりに対象であることから、

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = 4.91\times10^{-6}\ [\mathrm{m}^4]$$

となる。

（３）外径を $D$、肉厚を $t$ とすると、断面２次極モーメントは

$$I_p = \int_A r^2 dA = 2\pi\int_{D/2-t}^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi}{32}\{D^4-(D-2t)^4\}$$

となる。比ねじれ角をθとすると、

$$T = G\theta I_P$$

より、

$$\theta = \frac{T}{GI_P} = \frac{32T}{\pi^2 G\{D^4-(D-2t)^4\}}$$

$$= \frac{32\times200\times10^3\ \mathrm{N\ m}}{\pi^2\times(140\times10^9\ \mathrm{Pa})\{(0.1\mathrm{m})^4-(0.1\mathrm{m}-2\times0.008\mathrm{m})^4\}}$$

$$= 0.0922\ [\mathrm{rad/m}]$$

となる。棒の長さを $l$、ねじれ角をφとすると、

$$\phi = \theta l = 0.277\ [\mathrm{rad}$$

となる。また、外表面での最大せん断応力は

$$\tau = \frac{GD\theta}{2} = 646\ [\mathrm{MPa}$$

である。

（４）まず、許容応力は

$$\tau_a = \frac{\tau_B}{4} = \frac{300\mathrm{MPa}}{4} = 75\ [\mathrm{MPa}]$$

である。伝達する仕事率を $P$ [W]とすると、トルク $T$[N･m]は、

$$T = \frac{P}{\omega}$$

となる。ここで、ωは角速度[rad/s]である。駆動軸の外径を $D$[m]とすると、外表面での最大せん断応力が許容応力であること、ならびに断面２次極モーメントの定義から、以下を得る。

$$\tau_a = \frac{T}{I_p}\frac{D}{2}、\quad I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

従って、

$$\tau_a = \frac{T}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16P}{\pi D^3 \omega}$$

より、

$$\omega = \frac{T}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16P}{\pi D^3 \tau_a}$$

であり、１分当たりの回転数を $n$[rpm]とすると、

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

だから、

$$n = \frac{480P}{\pi^2 D^3 \tau_a} = 6.48\times10^{-7}\frac{P}{D^3}\ \text{[rpm]}$$

となり、馬力に比例し、駆動軸の直径の３乗に反比例することになる。もし、直径が $D = 10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$、200 馬力の場合には、

$$n = 6.48\times10^{-7}\frac{200\times75\times9.8}{0.1^3} = 99.1\ \text{[rpm]}$$

の回転速度を得る。