６—１. 長さ 2 m の鋼製の丸棒がエンジンに繋がれており、最大 1570 rpm で回転する。このとき、以下の各問いに答えなさい。ただし、鋼の横弾性係数を 77 GPa とする。

（１）鋼のせん断破壊の強度が 250 MPa であるとき、安全係数を 5 として、許容せん断応力τ_aを求めなさい。

（２）許容応力を満たす丸棒の外径 d を求めなさい。

（３）丸棒における最大せん断応力τ_{max}が許容応力τ_aとなるトルク T_a をもとめなさい。

（４）伝達される最大の馬力 P_{max} を[W]、[馬力]の単位で求めなさい。

注意：この問題では、あえて伝達する馬力 P を与えていない。

（１）$\tau_a = \dfrac{250\ \mathrm{MPa}}{5} = 50\ \mathrm{MPa}$

（２）トルクを T、角速度をω、仕事率を P とするとき、$P = T\omega$である。

一方、トルクの定義より、横弾性係数を G、比ねじれ角をθとすると、

$$T = \int_0^{d/2} \tau r \times 2\pi r dr = 2\pi G\theta \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi G\theta}{32} d^4$$

であり、外表面の最大せん断応力は

$$\tau_{\max} = \frac{Gd\theta}{2}$$

で与えられるので、

$$T = \frac{\pi G\theta}{32} d^4 = \frac{\pi \tau_{\max}}{16} d^3$$

を得る。これより、

$$\tau_a \geq \tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16P}{\pi d^3 \omega}$$

でなければならないから、

$$d \geq \left(\frac{16P}{\pi \tau_a \omega} \right)^{1/3}$$

となる。ここで、（１）の結果、ならびに

$$\omega = \frac{2\pi \times 1570}{60}\ \mathrm{rad/s}$$

を代入すると

$$d \geq \left(\frac{48P}{\pi^2 50 \times 10^6 \times 157} \right)^{1/3} = 0.000852P^{1/3} \quad [\mathrm{m}]$$

を得る。ただし、P の単位は[W]である。

（３）（２）の結果より、

$$T \leq \frac{\pi d^3 \tau_a}{16} = \frac{\pi d^3 \times 50 \times 10^6}{16} = 9.82 \times 10^6 d^3 = T_a$$

だから、

$$T_a = 9.82 \times 10^6 d^3 \quad [\mathrm{N\ m}]$$

どなる。ただし、d の単位は[m]である。

（４）（２）の結果より

$$P \leq \frac{\pi d^3 \omega \tau_a}{16} = 1.61 \times 10^9 d^3$$

だから、

$$P_{\max} = 1.61 \times 10^9 d^3 \ [\mathrm{N\ m/s}] = 1.18 \times 10^{12} d^3 [\text{馬力}]$$

となる。ただし、d の単位は[m]である。

６―２．長さ $l_1 = 50$ cm 、直径 $d_1 = 5$ cm の鋼製の丸棒１と長さ $l_2 = 30$ cm 、直径 $d_2 = 3$ cm の鋼製の丸棒２が溶接され、両端は壁に溶接されて固定されている（図６―1）。このとき、次の各問いに答えなさい。

（１）継ぎ手の部分Ｃ点にトルク $T = 400$ Nmが付加された。固定壁に発生するトルク T_A と T_B を求めなさい。

（２）丸棒１における最大せん断応力τ_1、比ねじれ角θ_1、丸棒２における最大せん断応力τ_2、比ねじれ角θ_2 を求めなさい。

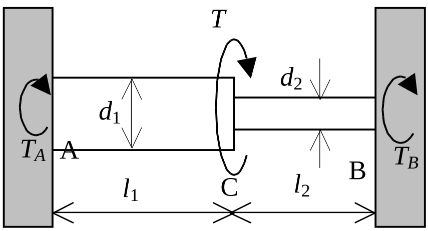

図６―１

（１）モーメントの釣り合いより、

$$T_A + T_B + T = 0$$

ここで、

$$T_A = \int_0^{d_1/2} \tau_1 r \times 2\pi r dr = 2\pi G\theta_1 \int_0^{d_1/2} r^3 dr = \frac{\pi G\theta_1}{32} d_1^{\ 4}$$

$$T_B = \int_0^{d_2/2} \tau_2 r \times 2\pi r dr = 2\pi G\theta_2 \int_0^{d_2/2} r^3 dr = \frac{\pi G\theta_2}{32} d_2^{\ 4}$$

であるので、

$$\frac{\pi G}{32}(\theta_1 d_1^{\ 4} + \theta_2 d_2^{\ 4}) + T = 0$$

を得る。さらには、比ねじれ角はそれぞれねじれ角ϕ_1、ϕ_2から

$$\theta_1 = \frac{\phi_1}{l_1}、\ \theta_2 = \frac{\phi_2}{l_2}$$

で与えられるが、C 点での棒の連続より、

$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

であるので、結局

$$\frac{\pi G\phi}{32}\left(\frac{d_1^{\ 4}}{l_1} + \frac{d_2^{\ 4}}{l_2}\right) + T = 0$$

であり、

$$\phi = -\frac{32T}{\pi G(d_1^{\ 4}/l_1 + d_2^{\ 4}/l_2)}$$

を得る。これより、

$$T_A = -\frac{d_1^{\ 4}/l_1}{d_1^{\ 4}/l_1 + d_2^{\ 4}/l_2} T = -\frac{1}{1 + (d_2/d_1)^4 (l_1/l_2)} T$$

となる。よって、

$$T_A = -\frac{1}{1+(3/5)^4(50/30)}T = -\frac{1}{1+(3/5)^3} \times 400 = -329\ \mathrm{N\ m}$$

$$T_B = -T - T_A = -71\ \mathrm{N\ m}$$

である。

（２）（１）の結果より、比ねじれ角は

$$\theta_1 = \frac{32}{\pi G d_1^4} T_A = -0.0537\ [\mathrm{rad/m}]$$

$$\theta_1 = \frac{32}{\pi G d_2^4} T_B = -0.00150\ [\mathrm{rad/m}$$

となり、最大せん断応力は、

$$\tau_1 = \frac{16 T_A}{\pi d_1^3} = -62.0\ [\mathrm{MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{16 T_B}{\pi d_2^3} = -2.89\ [\mathrm{GPa}$$

となる。

６—３．以下の各問いに答えなさい。

（１）鋼製のコイルばね（素線の長さ 30 cm、断面の半径 2 mm、ばねの半径を 3 cm）がある。ばね係数 k を求めなさい。ただし、鋼の剛性率は問題６—１で与えたものと同じとする。

（２）（１）と同じ素線の長さ、ばねの半径を有する銅合金のばねがある。（１）と同じばね係数 k と同じになるような、断面半径を求めなさい。ただし、銅合金の剛性率は 50GPa とする。

（３）鋼の許容応力は問題６—１の（１）で与えられるものとする。また、銅合金の許容応力は鋼の半分とする。このとき、鋼製のばねと銅合金のばねに付加できる最大荷重 P_{max} をそれぞれ求めなさい。

（１）ばねの半径を R、ばねに働く荷重を P とすると、ばねの素線の断面に働くトルク T は、

$$T = PR$$

であり、素線の半径を r、微小要素 dl の比ねじれ角をθとすると、

$$T = \int_0^r \tau r \times 2\pi r dr = 2\pi G\theta \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi G\theta r^4}{2}$$

だから、微小要素のねじれ角は

$$d\phi = \theta dl = \frac{2PR}{\pi G r^4} dl$$

となる。このねじれによる伸び $d\lambda$ は

$$d\lambda = R d\phi = \frac{2PR^2}{\pi G r^4} dl$$

だから、ばねの全伸びは、

$$\lambda = \int d\lambda = \frac{2PR^2}{\pi G r^4} \int_0^l dl = \frac{2PR^2 l}{\pi G r^4}$$

である。これより、ばね係数は

$$k = \frac{P}{\lambda} = \frac{\pi G r^4}{2R^2 l} = \frac{\pi \times 77 \times 10^9 \times (0.002)^4}{2 \times (0.03)^2 \times 0.3} = 7170 \text{ [N/m]}$$

となる。

（２）（１）の結果より、銅の剛性率と素線半径をそれぞれ G_2、r_2 とすると、

$$k = \frac{\pi G r^4}{2R^2 l} = \frac{\pi G_2 r_2^4}{2R^2 l}$$

より、

$$r_2 = \left(\frac{G}{G_2}\right)^{1/4} r = \left(\frac{77}{55}\right)^{1/4} \times 2 \text{ [mm]} = 2.22 \text{ [mm}$$

となる。

（３）（１）の結果より、

$$T = \frac{\pi G\theta r^4}{2} = \frac{\pi \tau_{max} r^3}{2} = PR$$

であるから、

$$\tau_{max} = \frac{PR}{\pi r^3} \le \tau_a$$

より、鋼製ばねの最大荷重は

$$P_{max} = \frac{\pi r^3 \tau_a}{R} = \frac{\pi \times (0.002)^3 \times 50 \times 10^6}{0.03} = 41.9 \text{ [N]}$$

となる。また、銅製ばねの最大荷重は

$$P_{max} = \frac{\pi r_2^{\,3} (\tau_a / 2)}{R} = \frac{\pi \times (0.00222)^3 \times 25 \times 10^6}{0.03} = 29.0 \text{ [N]}$$

となる。