

材料力学問題 第2編

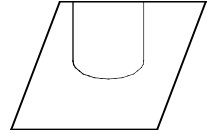
問題1. 図1のように、床に固定して立てられた直径3 mm、長さ50 cmの棒がある。この棒の上端に圧縮荷重 P を付加したとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) 棒の材料はアルミニウムでありヤング率を70 GPaである。

弾性変形するものとして、座屈荷重 P_{cr} を求めなさい。

(2) このアルミニウムの塑性変形開始、すなわち降伏は、主せん断応力が70 MPa以上のときに生じるものとする。棒の降伏が起こる荷重 P_y を求めなさい。

(3) 棒の直径を変えたとき、降伏が起こる荷重 P_y と座屈荷重 P_{cr} が同じになるかどうかを調べなさい。



【解】

(1) 下端から x 軸をとり、座屈が生じてたわんだ方向に y 軸をとると、自由端のたわみが y であるとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y$$

だから、

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C$$

とおいて、

$$\frac{dy}{dx} = -kA \sin kx + kB \cos kx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -k^2(A \cos kx + B \sin kx) = -k^2y$$

より、

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad C = 0$$

となる。固定端の境界条件より

$$y|_{x=0} = A + C = 0, \quad A = -C = 0$$

$$y'|_{x=0} = kB \cos kx = 0, \quad B = 0$$

を得るから、

$$y = (1 - \cos kx)$$

また、自由端の境界条件より、棒の長さを l とすると、

$$y|_{x=l} = (1 - \cos kl) = 1, \quad \cos kl = 0$$

だから、

$$k = \frac{2n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

となる。よって、臨界座屈荷重は、

$$P_{cr} = \frac{4n^2 EI}{l^2}$$

で与えられる。棒の断面二次モーメントは

$$I = \frac{d^4}{32} = \frac{(0.003)^4}{32} \text{ m}^4$$

より、

$$P_{cr} = \frac{4^2 EI}{l^2} = \frac{4^3 \times (70 \times 10^9) \times (0.003)^4}{0.5^2 \times 32} = 87.9 \text{ N}$$

となる。

(2) 右図のように、荷重軸と法線のなす角度が q の斜面に作用する力を考えると、法線方向の垂直力は、

$$N = P \cos q$$

斜面に平行なせん断力は

$$F = P \sin q$$

となる。ここで、斜面の断面積は A' とすると、それぞれの方向に働く垂直応力 σ_n 、せん断応力 τ_t は、

$$\sigma_n = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A'} \cos q, \quad \tau_t = \frac{F}{A'} = \frac{P}{A'} \sin q$$

である。ここで、荷重軸に垂直な断面の面積 A と斜面の面積は

$$A' = \frac{A}{\cos q}$$

の関係があるから、

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \cos^2 q = \frac{P}{2A} (1 + \cos 2q), \quad \tau_t = \frac{P}{A} \sin q \cos q = \frac{P}{2A} \sin 2q, \quad \text{ただし } \frac{P}{A}$$

を得る。せん断応力は、 τ_t が最大の値のときであるから、

$$\sin 2q = 1, \quad \tau_t = \pm \frac{P}{4A}$$

の角度の斜面において、

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2A}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{P}{2A}$$

となり、主せん断応力は

$$\tau_1 = \frac{P}{4A}$$

となる。題意より、主せん断応力が 70 MPa のとき、棒の降伏がおこるので、荷重軸方向の降伏強さは、

$$\sigma_y = 2 \tau_1 = 140 \text{ MPa}$$

となる。

(3) (2) の結果より、棒の降伏が生じる荷重 P_y は、

$$P_y = A \sigma_y = (40 \times 10^6) \times \frac{0.003^2}{4} = 990 \text{ N}$$

となる。(1) の結果より、降伏荷重は座屈荷重より大きい。

