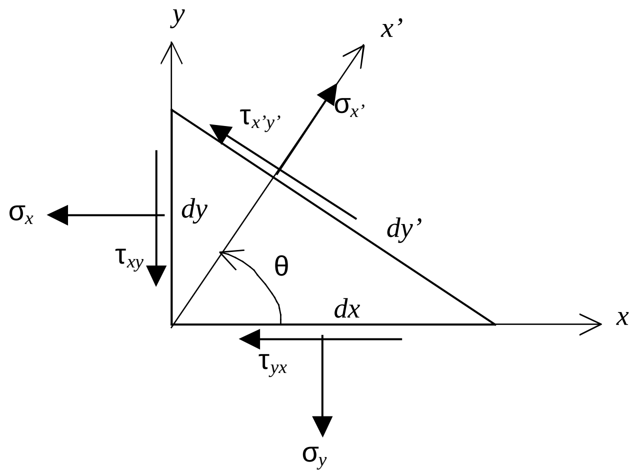
問題２．板内に$\sigma_x = 40$ MPa、$\sigma_y = -40$ MPa、$\tau_{xy} = 30$ MPa の応力が分布している。

このとき、以下の各問いに答えなさい。

（１）主応力σ_1、σ_2を求めなさい。主応力面は *xy* 座標から何度傾いているか求めなさい。なお、*xy* 座標と主応力面の関係を図に描くこと。

（２）主せん断応力τ_1を求めなさい。主せん断応力面は *xy* 座標から何度傾いているか求めなさい。なお、*xy* 座標と主せん断応力面の関係を図に描くこと。



（１）まず、右図のように *x* 軸から角度θだけ反時計まわりに傾いた *x'*軸に垂直な面に働く垂直応力$\sigma_{x'}$、せん断応力$\tau_{x'y'}$を求める。ただし、微小要素の底辺の長さを *dx*、高さを *dy*、斜辺の長さを *dy'*とし、*z* 方向の厚さを *dz* とする。

x 方向の力の釣り合いは、

$$\sigma_x(dydz)+\tau_{yx}(dxdz)$$
$$=\sigma_{x'}(dy'dz)\times\cos\theta-\tau_{x'y'}(dy'dz)\times\sin\theta$$

y 方向の力の釣り合いは

$$\sigma_y(dxdz)+\tau_{xy}(dydz)$$
$$=\sigma_{x'}(dy'dz)\times\sin\theta+\tau_{x'y'}(dy'dz)\times\cos\theta$$

となる。

以上より、

$$\sigma_{x'}\cos\theta-\tau_{x'y'}\sin\theta=\sigma_x\frac{dy}{dy'}+\tau_{yx}\frac{dx}{dy'} \qquad (1)$$

$$\sigma_{x'}\sin\theta+\tau_{x'y'}\cos\theta=\sigma_y\frac{dx}{dy'}+\tau_{xy}\frac{dy}{dy'} \qquad (2)$$

を得る。ここで、$\dfrac{dy}{dy'}=\cos\theta$、$\dfrac{dx}{dy'}=\sin\theta$ であるので、上式は

$$\sigma_{x'}\cos\theta-\tau_{x'y'}\sin\theta=\sigma_x\cos\theta+\tau_{yx}\sin\theta \qquad (3)$$

$$\sigma_{x'}\sin\theta+\tau_{x'y'}\cos\theta=\sigma_y\sin\theta+\tau_{xy}\cos\theta \qquad (4)$$

となる。（３）×cosθ＋（４）×sinθを計算すると、

$$\sigma_{x'}=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{yx}\sin\theta\cos\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{yx}\sin2\theta \qquad (5)$$

また、−（３）×sinθ＋（４）×cosθを計算すると、

$$\tau_{x'y'}=-\sigma_x\sin\theta\cos\theta+\sigma_y\sin\theta\cos\theta+\tau_{yx}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta+\tau_{yx}\cos2\theta \qquad (6)$$

を得る。（６）式より、*x'*軸が主軸となるのは、

$$-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta+\tau_{yx}\cos2\theta=0、\therefore\tan2\theta=\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad (7)$$

のときである。よって、題意より、

$$\tan2\theta=\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{2\times30}{40-(-40)}=\frac{3}{4} \qquad (8)$$

を得る。これより、

$$\cos2\theta=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}=0.6、\ \sin2\theta=\frac{2}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{2}{5}=0.4 \qquad (9)$$

であるので、

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{yx} sin 2\theta = \frac{40 + (-40)}{2} + \frac{40 - (-40)}{2} \times 0.6 + 30 \times 0.4 = 36 \text{ MPa}$$

となる。また、y'軸は x'軸から$\pi/2$ だけ傾いているので、（５）式より、

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \tau_{yx} sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(\cos 2\theta \cos\pi - sin\, 2\theta sin\pi) + \tau_{yx}(sin\, 2\theta \cos\pi + \cos 2\theta sin\pi)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{yx} sin 2\theta$$

となるから、

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{yx} sin 2\theta = \frac{40 + (-40)}{2} - \frac{40 - (-40)}{2} \times 0.6 - 30 \times 0.4 = -36 \text{ MPa}$$

となる。以上より、主応力は、

$$\sigma_1 = 36 \text{ MPa}、\ \sigma_2 = -36 \text{ MPa}$$

であり、σ_1 の主軸と x 軸とのなす角は

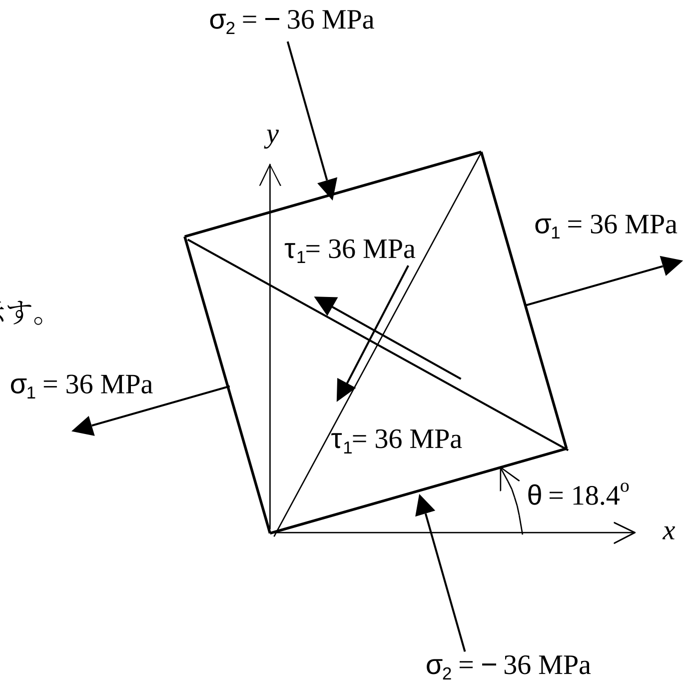
$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} = 0.322\ \ rad$$
$$= \frac{0.322}{\pi} \times 180° \qquad （１０）$$
$$= 18.4°$$

となる。右図に主応力面と xy 座標の関係を示す。

（２）主せん断応力は、

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 36 \text{ MPa}$$

である。主せん断応力は主軸と$\pm\pi/4$ の角度をなすので、これが働く面は右図のようになる。



注意：

解は公式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{yx} sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{yx} sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin 2\theta + \tau_{yx}\cos 2\theta$$

を用いて求めてよい。