問題３． $\sigma_x = 40\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_y = -20\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_z = 0\ \mathrm{MPa}$ 、 $\tau_{xy} = 20\ \mathrm{MPa}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ \mathrm{MPa}$ の応力成分を有する材料がある。このとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）主応力$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$ を求めなさい。
（２）主せん断応力$\tau_1$、$\tau_2$、$\tau_3$ を求めなさい。
（３）材料に働く静水圧的な応力$\sigma$を$\sigma_x$、$\sigma_y$、$\sigma_z$ を用いて求めなさい。同様にして、主応力を用いて静水圧的な応力$\sigma$を求めなさい。

（１）主応力を$\sigma$とすると、以下の行列式の解となる。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 40 - \sigma & 20 & 0 \\ 20 & -20 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} \\
&= (40 - \sigma)(20 + \sigma)\sigma + 20 \times 20\sigma \\
&= \{(40 - \sigma)(20 + \sigma) + 400\}\sigma \\
&= -(\sigma^2 - 20\sigma - 1200)\sigma \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上式の（　）内の２次方程式の解は、

$$\sigma = 10 \pm \sqrt{10^2 + 1200} = 10 \pm \sqrt{1300} = 46.1,\ -26.1$$

である。よって、主応力は、

$$\sigma_1 = 46.1\ \mathrm{MPa}、\ \sigma_2 = 0\ \mathrm{MPa}、\ \sigma_3 = -26.1\ \mathrm{MPa}$$

となる。
（２）（１）の結果より、

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 36.1\ \mathrm{MPa}、\ \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 23.0\ \mathrm{MPa}、\ \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 13.0\ \mathrm{MPa}$$

となる。
（３）静水圧的な応力は

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(40 - 20 + 0) = 6.67\ \mathrm{MPa}$$

となる。また、主応力を用いても、

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(46.1 + 0 - 26.1) = 6.67\ \mathrm{MPa}$$

となる。