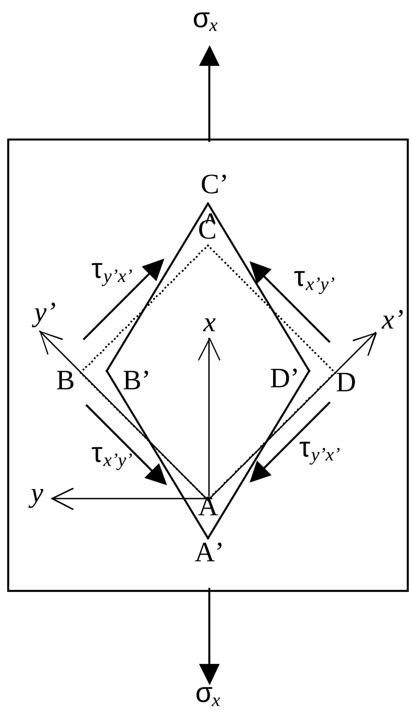
問題４．以下の各問いに答えなさい。
（１）材料のヤング率を E、ポアソン比をνとするとき、剛性率 G、体積弾性係数 K を E とνを用いて導出しなさい。
（２）問題３において、材料はヤング率 $E = 206\ \mathrm{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.28$ の鋼であった。x、y、z 方向のひずみε_x、ε_y、ε_z、ならびにせん断ひずみγ_{xy}を求めなさい。
（３）問題３において、体積ひずみε_vをもとめなさい。

【解】
（１）



【剛性率 G の導出】

右の上の図のように、x 軸方向に引張応力σ_xが作用すると、xy 軸と 45°傾いた辺（$x'y'$軸）をもつ正方形の微小要素 ABCD に作用するせん断応力は

$$\tau_{x'y} = \tau_{yx'} = \frac{\sigma_x}{2}$$

である。このとき、フックの法則は、

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$
$$\tau_{x'y} = G\gamma_{xy'}$$

である。

次にひずみについて考える。右の下の図のように、変形前と変形後の微小要素の縦・横ひずみとせん断ひずみの幾何学的関係を見やすくするため、A 点と A'点を重ねることにする。微小要素 ABCD は変形後には A'B'C'D'となり、x 方向の伸び変位 du は、

$$du = \mathrm{A'C'} - \mathrm{AC}$$

で与えられる。よって縦ひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{A'C'} - \mathrm{AC}}{\mathrm{AC}}$$

であるから、

$$\mathrm{A'C'} = \mathrm{AC}(1 + \varepsilon_x)$$

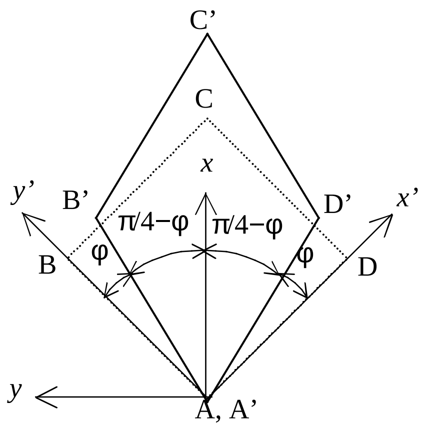
となる。一方、横ひずみは

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{\mathrm{B'D'} - \mathrm{BD}}{\mathrm{BD}}$$

であるから、

$$\mathrm{B'D'} = \mathrm{BD}(1 - \nu\varepsilon_x)$$

である。すると、変形前後の要素の幾何学的関係から、以下の２式をえる。



$$\mathrm{A'C'} = 2\mathrm{A'B'}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{A'B'}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{A'B'}\cos\varphi(1 + \tan\varphi)$$

$$\mathrm{B'D'} = 2\mathrm{A'B'}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{A'B'}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{A'B'}\cos\varphi(1 - \tan\varphi)$$

ここで、弾性変形ではひずみは非常に小さく、

$$\gamma_{x'y'} = \tan 2\varphi \approx 2\tan\varphi$$

であるので、

$$A'C' = \sqrt{2}\,AB\cos\varphi\left(1+\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)、\quad B'D' = \sqrt{2}\,AB\cos\varphi\left(1-\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)$$

であり、これらの結果より

$$\frac{A'C'}{B'D'} = \frac{2+\gamma_{x'y'}}{2-\gamma_{x'y'}} = \frac{1+\varepsilon_x}{1-\nu\varepsilon_x}$$

を得る。これより、ひずみが非常に小さいことから、２次以上の項を無視して

$$\begin{aligned}
&(2+\gamma_{x'y'})(1-\nu\varepsilon_x)-(2-\gamma_{x'y'})(1+\varepsilon_x) = 2+\gamma_{x'y'}-2\nu\varepsilon_x-\nu\varepsilon_x\gamma_{x'y'}-2+\gamma_{x'y'}-2\varepsilon_x+\varepsilon_x\gamma_{x'y'} \\
&= 2\gamma_{x'y'}-2(1+\nu)\varepsilon_x+(1-\nu)\varepsilon_x\gamma_{x'y'} \\
&\approx 2\gamma_{x'y'}-2(1+\nu)\varepsilon_x \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、

$$\gamma_{x'y'} = (1+\nu)\varepsilon_x$$

となる。ここで、x 軸方向の単軸引張の場合のフックの法則

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

と、$x'y'$軸におけるせん断変形に関するフックの法則

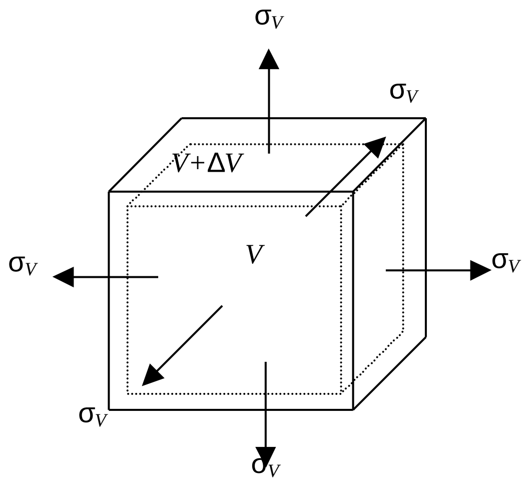
$$\gamma_{x'y'} = \frac{\tau_{x'y'}}{G} = \frac{\sigma_x}{2G}$$

から、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

である。

【体積弾性係数 K の導出】



初期の体積が V の材料が、静水圧的な応力σ_V の作用を受けて、膨張あるいは収縮して、その体積が $V+\Delta V$ になるとき、体積ひずみは

$$\varepsilon_V = \frac{(V+\Delta V)-V}{V} = \frac{\Delta V}{V}$$

で与えられる。今、変形前の微小要素の体積を

$$V = dxdydz$$

とする。変形後には x、y、z 方向にそれぞれ du、dv、dw だけ変位するものとすると、

$$V+\Delta V = (dx+du)(dy+dv)(dz+dw)$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_V &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{(dx+du)(dy+dv)(dz+dw)-dxdydz}{dxdydz} \\
&= \frac{dudydz+dvdzdx+dwdxdy+dudvdz+dvdwdx+dwdudy+dudvdw}{dxdydz} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z
\end{aligned}$$

となる。変位あるいはひずみが非常に小さい場合には、２次以上の微小項を無視して、

$$\varepsilon_V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

である。

静水圧的な応力σ_Vと体積ひずみに関するフックの法則は

$$\sigma_V = K\varepsilon_V$$

で表される。ここで、Kは体積弾性係数である。

次に、体積弾性係数Kをヤング率Eとポアソン比νで表そう。体積ひずみと縦ひずみの関係から、

$$\sigma_V = K(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

である。ここで、$\sigma_V = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$であるから、

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_V$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_V$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_V$$

であり、

$$\varepsilon_V = \frac{\varepsilon_x}{3} = \frac{\varepsilon_y}{3} = \frac{\varepsilon_z}{3}$$

となることが容易にわかる。よって、

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

を得る。

（２）問題３に与えられた$\sigma_x = 40$ MPa、$\sigma_y = -20$ MPa、$\sigma_z = 0$ MPaを垂直応力と垂直ひずみに関する一般化されたフックの法則に代入して

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{206\times10^9}[40\times10^6 - 0.28\times(-20\times10^6 + 0)] = 0.000221$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{206\times10^9}[-20\times10^6 - 0.28\times(0 + 40\times10^6)] = -0.000152$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{206\times10^9}[0 - 0.28\times(40\times10^6 - 20\times10^6)] = -0.0000272$$

となる。また、（１）の結果より、鋼の剛性率は、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{206}{2(1+0.28)} = 80.5 \text{ GPa}$$

である。よって、問題３では、$\tau_{xy} = 20$ MPaより

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{20\times10^6}{80.5\times10^9} = 0.000248$$

となる。

（３）（２）の結果から、

$$\varepsilon_V = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = 0.0000142$$

あるいは、一般化されたフックの法則を用いて以下のように計算しても良い。

$$\varepsilon_V = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{1-2\nu}{3E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\times0.28}{3\times206\times10^9}(40\times10^6 - 20\times10^6 + 0) = 0.0000142$$