問題５．等方性材料で成り立つ以下のフックの法則

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]、\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]、\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}、\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}、\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

を用いて、以下の各問いに答えなさい。なお、以下の各問いの答えは、剛性率 G ならびにポアソン比ν を用いて表しなさい。

（１）単位体積当たりの弾性エネルギーU_eを、応力の関数として表しなさい。
（２）単位体積当たりの弾性エネルギーU_eを、ひずみの関数として表しなさい。
（３）（１）で求めた解は、応力の第２不変量 J_2 とどのような関係にあるか求めなさい。
（４）（１）の解を、主応力σ_1、σ_2、σ_3 ならびに主応力で表される第２不変量 J_2 を用いて表しなさい。

【解】

（１）フックの法則が成り立つ弾性変形では、単位体積当たりの弾性エネルギーは

$$\begin{aligned} U_e &= \int \sigma_x d\varepsilon_x + \int \sigma_y d\varepsilon_y + \int \sigma_z d\varepsilon_z + \int \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int \tau_{zx} d\gamma_{zx} \\ &= \frac{\sigma_x\varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y\varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z\varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz}\gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zx}\gamma_{zx}}{2} \end{aligned} \qquad (1)$$

で表される。ここで、一般化されたフックの法則を用いると、

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\sigma_x^2 - \nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z)}{2E} + \frac{\sigma_y^2 - \nu(\sigma_y\sigma_z + \sigma_y\sigma_x)}{2E} + \frac{\sigma_z^2 - \nu(\sigma_z\sigma_x + \sigma_z\sigma_y)}{2} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} \\ &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} \\ &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{2E} - \frac{(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}{E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} \end{aligned} \qquad (2)$$

となる。ここで、（２）式の最後の式の変換には、

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_z\sigma_x$$

を用いた。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (3)$$

であるから、

$$U_e = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{4G(1+\nu)} - \frac{\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z}{2G} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} \qquad (4)$$

となる。

（２）まず、一般化されたフックの法則より、

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (5)$$

だから、

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad (6)$$

となる。同様にして、

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] - \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_y)、\ \therefore \sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_y-\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)]-\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]=\frac{1+\nu}{E}(\sigma_y-\sigma_z)、\therefore\sigma_y-\sigma_z=\frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_y-\varepsilon_z)$$

$$\varepsilon_z-\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]-\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]=\frac{1+\nu}{E}(\sigma_z-\sigma_x)、\therefore\sigma_z-\sigma_x=\frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_z-\varepsilon_x)$$

（７）

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}&2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2-(\sigma_x-\sigma_y)^2-(\sigma_y-\sigma_z)^2-(\sigma_z-\sigma_x)^2\\&=6(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\end{aligned}\quad（８）$$

となることに着目すると、これに（６）、（７）式を代入して、

$$\begin{aligned}&\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\\&=\frac{1}{6}[2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2-(\sigma_x-\sigma_y)^2-(\sigma_y-\sigma_z)^2-(\sigma_z-\sigma_x)^2]\\&=\frac{E^2}{3(1-2\nu)^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2-\frac{E^2}{6(1+\nu)^2}\{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\}\end{aligned}\quad（９）$$

を得る。また、

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}、\ \tau_{yz}=G\gamma_{yz}、\ \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\quad（１０）$$

であるから、（６）、（９）、（１０）式を（２）式に代入すると、

$$\begin{aligned}U_e&=\frac{E(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2}{2(1-2\nu)^2}-\frac{(1+\nu)E}{3(1-2\nu)^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+\frac{E}{6(1+\nu)}\{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\}\\&\quad+\frac{G}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)\\&=\frac{(3-2\nu)E(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2}{6(1-2\nu)^2}+\frac{E}{6(1+\nu)}\{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\}+\frac{G}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)\end{aligned}$$

（１１）

となる。（１１）式に（３）式を入れて、

$$U_e=\frac{(3-2\nu)(1+\nu)G(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2}{3(1-2\nu)^2}+\frac{G\{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2-(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2-(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\}}{3}+\frac{G}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)$$

（１２）

を得る。

あるいは、

$$(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2=2(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2-6(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x)$$

であるから、（１２）式に代入して、

$$\begin{aligned}U_e&=\frac{\{(3-2\nu)(1+\nu)+2(1-2\nu)^2\}G(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2}{3(1-2\nu)^2}-2G(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z+\varepsilon_x)+\frac{G}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)\\&=\frac{(5-9\nu+2\nu^2)G(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2}{3(1-2\nu)^2}-2G(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z+\varepsilon_x)+\frac{G}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)\end{aligned}$$

（１３）

となる。

（３）（４）式において、応力の第２不変量は、

$$J_2=-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}{}^2-\tau_{yz}{}^2-\tau_{zx}{}^2)$$

であったから、

$$U_e = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{4G(1+\nu)} + \frac{J_2}{2G}$$

で表される。

（４）単位体積当たりの弾性エネルギーを、主応力で表すと、せん断応力がないので、（４）式は

$$U_e = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{4G(1+\nu)} - \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1}{2G}$$

となる。また、応力の第２不変量は、

$$J_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

であるので、結局、

$$U_e = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{2E} + \frac{J_2}{2G}$$

となる。

注意：応力の不変量がわからない場合には、以下の定義に従って求めなさい。主応力を求める定義式

$$\begin{vmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_{xy} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & \sigma - \sigma_y & -\tau_{yz} \\ -\tau_{zx} & -\tau_{yz} & \sigma - \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y)(\sigma - \sigma_z) - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{yz}{}^2(\sigma - \sigma_x) - \tau_{zx}{}^2(\sigma - \sigma_y) - \tau_{xy}{}^2(\sigma - \sigma_z)$$

$$= \{\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y\}(\sigma - \sigma_z) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)\sigma + \sigma_x\tau_{yz}{}^2 + \sigma_y\tau_{zx}{}^2 + \sigma_z\tau_{xy}{}^2$$

$$= \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2)\sigma$$

$$-\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \sigma_x\tau_{yz}{}^2 + \sigma_y\tau_{zx}{}^2 + \sigma_z\tau_{xy}{}^2$$

$$= 0$$

より、

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0$$

ここで、

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{yz}{}^2 - \tau_{zx}{}^2)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}{}^2 - \sigma_y\tau_{zx}{}^2 - \sigma_z\tau_{xy}{}^2$$

をそれぞれ、応力の第１、第２、第３の不変量という。