平成１７年度　材料力学　中間試験問題
解答用紙２枚、計算用紙２枚
（解答用紙には、学年、学籍番号、氏名を最上段に書くこと）

問題１、２は必ず解くこと。問題３は（１）、（２）のうち一つを選んで解くこと。

問題１．図１のように、長さ L のはりが A 点で壁に固定されており、はりの中央 C 点で回転支持で支えられている。このはりの自由端 B 点にモーメント M_o を付加したとき、以下の各問いに答えなさい。

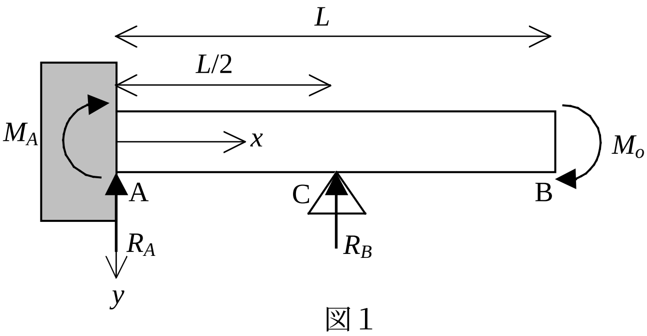
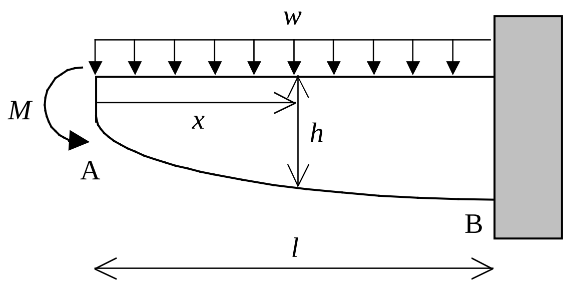


図１

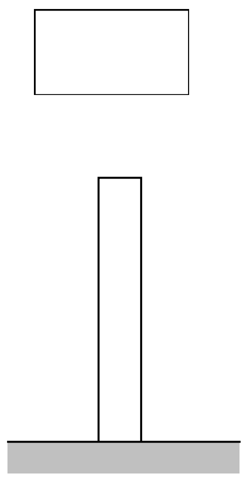
（１）固定端 A 点での反力を R_A、固定モーメントを M_A とし、回転支持 B 点での反力を R_B とするとき、はりの自由体線図から、力とモーメントつりあいの式を求めなさい。
（２）A 点からはりにそって x 軸をとるとき、AC 間の曲げモーメント $M_{x,AC}$、CB 間の曲げモーメント $M_{x,CB}$ を R_A、R_B、M_A、M_o を用いて求めなさい。
（３）AC 間のたわみ y_{AC} を求めなさい。また、M_A、R_A、R_B を求めなさい。
（４）CB 間のたわみ y_{CB} を求め、B 点でのたわみ角 i_B とたわみ δ_B を求めなさい。
　ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。

問題２．図２のように、B 点で壁に固定された長さ $l = 3.54$ m のはりがあり、はりの自由端 A 点にモーメント $M = 200$ N m が作用し、はり全体に均一分布荷重 $w = 40$ N/m が作用している。はりの断面の幅 b は一定で $b = 3$ cm であり、高さ h は変化するものとする。このとき、以下の各問いに答えなさい。



（１）はりの材料の引張強さは $\sigma_B = 500$ MPa である。引張強さを基準とした安全率を $S = 5$ とするとき、許容応力 σ_a を求めなさい。
（２）はりの曲げ応力が許容応力となるようなはりの断面の高さを x の関数として表しなさい。ただし、x の単位は[m]とする。また、自由端 A 点でのはりの断面の高さ h_A、固定端 B 点でのはりの断面の高さ h_B を求めなさい。

問題３．以下の各問いに答えなさい。ただし、ステンレス鋼のヤング率を $E = 200$ GPa 、剛性率を $G = 77$ GPa とする。
（１）直径 20 cm、長さ 5 m のステンレス鋼製の丸棒がある。このステンレス鋼のせん断破壊に対する許容応力は $\tau_a = 100$MPa である。この駆動軸が 2000rpm で回転して 20000 馬力の仕事率を伝達するとき、外表面での最大せん断応力 τ_{max} を求めなさい。もし、求めた最大せん断応力が許容応力を越えている場合には、$\tau_{max} = \tau_a$ となるような直径 D を求めなさい。



（２）図３のように、床に固定された直径 $d = 1$ cm、長さ $l = 50$ cm のステンレス鋼製棒の他端に、高さ $h = 10$ cm から重さ $W = 1$ kg の剛体を落とした。このとき、衝撃荷重 P を求めなさい。また、この衝撃荷重で棒の座屈が起こるかどうかを答えなさい。

平成１７年度　材料力学　中間試験

【解答】

問題１

（１） $R_A + R_B = 0$、 $M_A = \dfrac{R_B L}{2} - M_o$

（２） $M_{x,AC} = M_A + R_A x$、 $M_{x,CB} = -M_o$

（３）まず、固定端ではたわみ角、たわみが０だから、 $y_{AC}\Big|_{x=0} = \dfrac{dy_{AC}}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ より、

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_{x,AC}}{EI} = \frac{1}{EI}(-R_A x - M_A)、\quad \frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A x^2}{2} - M_A x\right)、\quad y_{AC} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2}\right)$$

ここで、C 点でもたわみが０であるので、

$$y_{AC}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A L^3}{48} - \frac{M_A L^2}{8}\right) = \frac{L^2}{48EI}\left(-R_A L - 6M_A\right) = 0$$

より、

$$M_A = -\frac{R_A L}{6}$$

である。これを（１）のモーメントのつりあい式に代入すると、

$$-\frac{R_A L}{6} = \frac{R_B L}{2} - M_o、\quad \therefore R_A L + 3R_B L = 6M_o$$

である。さらに、これに（１）の力のつりあい式を代入すると、以下を得る。

$$2R_B L = 6M_o、\quad \therefore R_B = \frac{3M_o}{L}、\quad R_A = -\frac{3M_o}{L}、\quad M_A = \frac{M_0 L}{2}$$

従って、AC 間のたわみ角 i_{AC} ならびにたわみは

$$i_{AC} \approx \frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{M_o}{2EI}\left(\frac{3x^2}{L} - x\right)、\quad y_{AC} = \frac{M_o}{4EI}\left(2\frac{x^3}{L} - x^2\right)$$

であるから、C 点でのたわみ角は

$$i_C \approx \frac{dy_{AC}}{dx}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{M_o}{2EI}\left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{2}\right) = \frac{M_o L}{8EI}$$

となる。

　次に、CB 間でのたわみは、

$$\frac{d^2 y_{CB}}{dx^2} = -\frac{M_{x,CB}}{EI} = \frac{M_o}{EI}、\quad \frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{M_o x}{EI} + C_1、\quad y_{CB} = \frac{M_o x^2}{2EI} + C_1 x + C_2$$

となる。ここで、C 点でのはりの連続から、

$$\frac{dy_{CB}}{dx}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{M_o L}{2EI} + C_1 = \frac{M_o L}{8EI}、\quad \therefore C_1 = -\frac{3M_o L}{8EI}$$

また、

$$y_{CB} = \frac{M_o L^2}{8EI} - \frac{3M_o L}{8EI}\frac{L}{2} + C_2 = -\frac{M_o L^2}{16EI} + C_2 = 0、\quad \therefore C_2 = \frac{M_o L^2}{16EI}$$

である。以上より、CB 間のたわみ角 i_{CB} とたわみ y_{CB} は、

$$i_{CB} \approx \frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{M_o}{8EI}(8x - 3L)、\quad y_{CB} = \frac{M_o x^2}{2EI} - \frac{3M_o L}{8EI}x + \frac{3M_o L^2}{16EI} = \frac{M_o}{16EI}(8x^2 - 6Lx + 3L^2)$$

で与えられる。よって、B 点でのたわみ角 i_B とたわみ δ_B は、

$$i_B \approx \left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=L} = \frac{5M_o L}{8EI}、\quad \left.y_{CB}\right|_{x=L} = \frac{5M_o L^2}{16EI}$$

である。

問題２.

（１）　$$\sigma_a = \frac{\sigma_B}{S} = \frac{500\text{MPa}}{5} = 100\ [\text{MPa}]$$

（２）　x の位置における曲げモーメントは、

$$M_x = -M - \frac{wx^2}{2}$$

より、はりの表面での曲げ応力が、許容応力となるのは

$$\sigma = \left|\frac{M_x}{I}\frac{h}{2}\right| = \frac{3(2M + wx^2)}{bh^2} = \sigma_a$$

の時である。よって、

$$h = \sqrt{\frac{3(2M + wx^2)}{b\sigma_a}} = \sqrt{\frac{3\times(2\times200 + 40x^2)}{0.03\times100\times10^6}} = \sqrt{0.0004 + 0.00004x^2}$$

$$= 0.02\sqrt{1 + 0.1x^2}$$

となる。これより、A 点では、

$$h_A = \left.h\right|_{x=0} = 0.02\ [\text{m}] = 2.00\ [\text{cm}]$$

B 点では、

$$h_B = \left.h\right|_{x=3.54} = 0.02\sqrt{1 + 0.1\times3.54^2} = 0.03\ [\text{m}] = 3.00\ [\text{cm}]$$

となる。

問題３

（１）仕事率を P、トルクを T、角速度を ω、直径を d、断面２次極モーメントを I_p とすると、

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{2\tau_{\max} I_p}{d} = \frac{\pi\tau_{\max} d^3}{16}$$

であり、１分間あたりの回転数を n とすると、

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

より、

$$\tau_{\max} = \frac{16P}{\pi\omega d^3} = \frac{480P}{\pi^2 nd^3} = \frac{480\times(20000\times75\times9.8\text{W})}{\pi^2\times500\text{rpm}\times(0.2\text{m})^3} = 179\ [\text{MPa}]$$

であるから、許容応力を越えている。従って、

$$D = \left(\frac{480P}{\pi^2 n\tau_a}\right)^{1/3} = \left\{\frac{480\times(20000\times75\times9.8\text{W})}{\pi^2\times500\text{rpm}\times100\times10^6\ \text{Pa}}\right\}^{1/3} = 0.243\ [m] = 24.3\ [\text{cm}]$$

を得る。

（２）棒の縮みを λ とすると、

$$W(h + \lambda) = \frac{P\lambda}{2}$$

ここで、$\lambda = \dfrac{\sigma}{E}l = \dfrac{Pl}{AE}$ より、

$$Wh + \frac{WPl}{AE} = \frac{P^2 l}{2AE}\text{、}\quad \therefore P^2 - 2WP - \frac{2AEWh}{l} = 0$$

より、衝撃荷重は

$$P = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{Wl}}\right) = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi d^2 Eh}{2Wl}}\right) = 802\ [\mathrm{kgf}]$$

となる。また、座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^3 Ed^4}{256 l^2} = 969\ [\mathrm{N}] = 98.9\ [\mathrm{kgf}]$$

であって、衝撃荷重よりも小さいので、座屈が生じる。