平成１７年度後期　材料力学　期末試験問題

問題１

　図１のように、半径 5 mm の丸棒の両端に、引張荷重 $P$ が作用している。このとき、以下の各問いに答えなさい。

（１） $P = 545\ \mathrm{N}$ のとき、図１のように荷重軸と $\theta = 30^\circ$ の角度をなす斜面に働く垂直応力 $\sigma$ とせん断応力 $\tau$ を求めなさい。

（２）最大せん断応力が 40 MPa のとき、この棒は降伏する。降伏荷重を求めなさい。

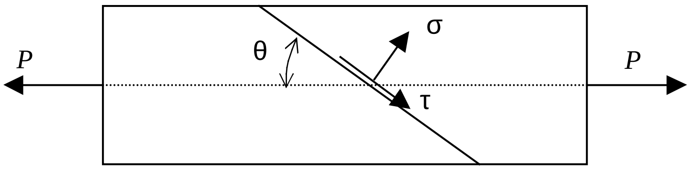

図１

問題２．以下の各問いに答えなさい。

（１）図２のように、厚さ $dz$ で $x$ 軸、$y$ 軸に沿った辺の長さがそれぞれ $dx$、$dy$ の微小要素に $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$ が作用しているとき、$x$ 軸から反時計まわりに $\theta$ だけ回転した $x'$ 軸に垂直な斜辺に働く応力 $\sigma_{x'}$、 $\tau_{x'y'}$ を求めなさい。なお、$x'$ 軸に垂直な斜辺の長さを $dy'$ とする。

（２）$y'$ 軸は、$x$ 軸から $\theta + \pi/2$ の角度だけ傾いていることを利用して、（１）の結果から $\sigma_{y'}$ を求めなさい。

（３） $\sigma_x = 20\ \mathrm{MPa}$ 、 $\sigma_y = -20\ \mathrm{MP}$、 $\tau_{xy} = 20\ \mathrm{MP}$ のとき、主応力 $\sigma_1$、$\sigma_2$ ならびに主せん断応力を求めなさい。また、主応力 $\sigma_1$ に関する主軸と $x$ 軸のなす角度 $\theta_n$ を求めなさい。

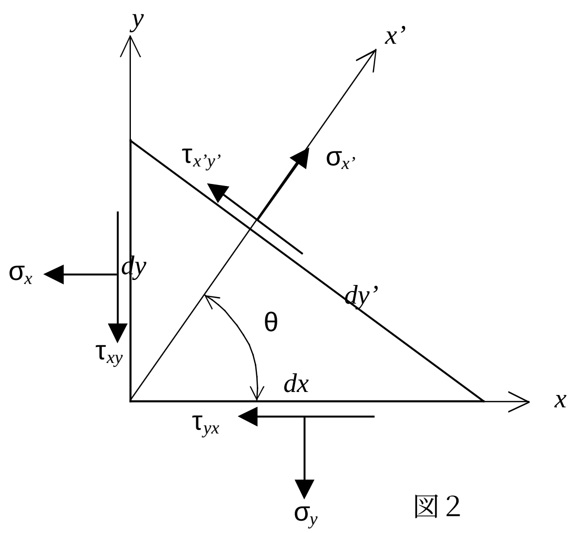

図２

問題３．以下の各問いに答えなさい。

（１）$\sigma_x = 10,\ \sigma_y = 0,\ \sigma_z = -10,\ \tau_{xy} = 49,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = 0$（但し単位は MPa）のとき、主応力 $\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$ を求めなさい。

（２）（１）の材料はアルミニウム（$E$ = 70 GPa、ポアソン比 $\nu$ =0.33）であった。主応力で生じる主ひずみ $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$ を求めなさい。

（３）（１）、（２）のとき、アルミニウムの単位体積あたりに蓄積される弾性エネルギー $U_e$ を求めなさい。但し、単位は $\mathrm{J/m^3}$ とする。

（４）鋼製の両端を密封した円筒形のガスボンベがある。ボンベの円筒部の直径を 20 cm、肉厚を 1 cm とし、ボンベの内圧を $p$ とするとき、円筒表面の微小要素において円筒の軸方向と周方向にそれぞれ、

$$\sigma_x = \frac{d}{2t}p、\ \sigma_y = \frac{d}{t}p、ただし、d は円筒半径、t は円筒肉厚$$

の応力が作用し、他の応力成分は０と見なして良いものとする。引張試験で得られた鋼の降伏強度は $\sigma_Y = 300\ \mathrm{MP}$ であった。ミーゼスの降伏条件では、以下で定義される相当応力

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

が降伏強さ以上になると、材料は降伏する。これを用いて、ボンベが降伏するときの内圧 $p$ を求めなさい。ただし、圧力の単位は[気圧]とする（1 気圧 = 0.1013 MPa）。

【解】

問題１

（１）軸に垂直な断面（半径 $r$）の面積を $A$、斜面の面積を $A'$とすると、

$$A=\pi r^2、\ A'=\frac{A}{sin\theta}=\frac{\pi r^2}{sin\theta}$$

となる。荷重 $P$ の斜面の垂線方向の分力は $Psin\theta$ だから、

$$\sigma A'=Psin\theta、\ \therefore \sigma=\frac{P}{A}sin\theta=\frac{P}{\pi r^2}sin^2\theta$$

また、荷重 $P$ の斜面の接線方向の分力は $P\cos\theta$だから、

$$\tau A'=P\cos\theta、\ \therefore \tau=\frac{P}{A'}\cos\theta=\frac{P}{\pi r^2}sin\theta\cos\theta$$

以上より、

$$\sigma=\frac{545}{\pi\times0.005^2}sin^2 30°=\frac{545}{4\pi\times0.005^2}=1.73\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau=\frac{545}{\pi\times0.005^2}\cos 30° sin30°=\frac{\sqrt{3}\times545}{4\pi\times0.005^2}=3.00\ \mathrm{MPa}$$

となる。

（２）（１）の結果より、最大せん断応力となるのは、$\theta=45°$のとき、よってせん断降伏強さを$\tau_Y$ とすると、

$$\tau_{\max}=\frac{P}{2\pi r^2}\geq\tau_Y$$

だから、降伏荷重は

$$P=2\pi r^2\tau_Y=2\times\pi\times0.005^2\times40\times10^6=11.0\ \mathrm{kN}$$

となる。

問題２

（１）$x$ 軸方向の力の釣り合いより、

$$\sigma_{x'}dy'dz\cos\theta-\tau_{x'y'}dy'dzsin\theta=\sigma_x dydz+\tau_{yx}dxdz$$

$y$ 軸方向の力の釣り合いより、

$$\sigma_{x'}dy'dzsin\theta+\tau_{x'y'}dy'dz\cos\theta=\tau_{xy}dydz+\sigma_y dxdz$$

となる。ここで、

$$dx=dy'sin\theta、\ dy=dy'\cos\theta$$

なので、

$$\sigma_{x'}\cos\theta-\tau_{x'y'}sin\theta=\sigma_x\cos\theta+\tau_{yx}sin\theta、\ \sigma_{x'}sin\theta+\tau_{x'y'}\cos\theta=\tau_{xy}\cos\theta+\sigma_y sin\theta$$

である。これより、

$$\sigma_{x'}=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y sin^2\theta+2\tau_{yx}sin\theta\cos\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{yx}sin2\theta$$

$$\tau_{x'y'}=-\sigma_x sin\theta\cos\theta+\sigma_y sin\theta\cos\theta-\tau_{yx}sin^2\theta+\tau_{xy}\cos^2\theta=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta$$

を得る。

（２）$\theta+\pi/2$を代入すると

$$\sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta+\pi)+\tau_{yx}sin(2\theta+\pi)=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta-\tau_{yx}sin2\theta$$

である。

（３）主応力が実現する座標軸では、せん断応力は０だから、

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -\frac{20-(-20)}{2} sin2\theta + 20\cos 2\theta = 20(-sin2\theta + \cos 2\theta) = 0$$

であるから、$2\theta = \frac{\pi}{4}$、もしくは、$2\theta = \frac{5\pi}{4}$ を得る。

よって、$2\theta = \frac{\pi}{4}$ を選んだとき

$$\sigma_1 = \frac{20+(-20)}{2} + \frac{20-(-20)}{2}\cos\frac{\pi}{4} + 20 sin\frac{\pi}{4} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 28.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{20+(-20)}{2} - \frac{20-(-20)}{2}\cos\frac{\pi}{4} - 20 sin\frac{\pi}{4} = -\frac{40}{\sqrt{2}} = -28.3 \text{ MPa}$$

であり、$\theta_n = \frac{\pi}{8}$ となる。

問題３.

（１）

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10-\sigma & 49 & 0 \\ 49 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -10-\sigma \end{vmatrix} = (10-\sigma)(10+\sigma)\sigma + 2401(10+\sigma)$$

$$= (10-\sigma)(10+\sigma)\sigma + 2401(10+\sigma)$$

$$= -(10+\sigma)(\sigma^2 - 10\sigma - 2501)$$

$$= 0$$

だから、

$$\sigma = -10,\ 5+\sqrt{2526},\ 5-\sqrt{2526} = -10,\ 55.3, -45.3 \text{ MPa}$$

これより、主応力は

$$\sigma_1 = 55.3 \text{ MPa}、\ \sigma_2 = -10 \text{ MPa}、\ \sigma_3 = -45.3 \text{ MPa}$$

（２）　フックの法則より

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{70\times10^3}[55.3 - 0.33\times(55.3)] = \frac{1.33\times55.3}{70\times10^3} = 0.00105$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{70\times10^3}[-10 - 0.33\times(-45.3+55.3)] = -\frac{6.7}{70\times10^3} = -0.000957$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{70\times10^3}[-45.3 - 0.33\times(45.3)] = -\frac{1.33\times45.3}{70\times10^3} = -0.000861$$

となる。

（３）　弾性エネルギーは、主応力、主ひずみを用いて

$$U_e = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}$$

$$= \frac{55.3\times10^6\times0.00105}{2} + \frac{10\times0.000957}{2} + \frac{45.3\times10^6\times0.000861}{2}$$

$$= (50\times10^6 \text{ N/m}^2)\times0.00095 = 47500 \text{ Nm/m}^3 = 5.33\times10^5 \text{ J/m}^3$$

となる。

【別解】

$$U_e = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} + \frac{(1+\nu)\tau_{xy}^2}{E} = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2]$$

$$= \frac{1}{2\times70\times10^9}[2\times(10\times10^6)^2 + 1.33\times(49\times10^6)^2]$$

$$=$$

（４）微小要素にせん断応力は働かず、$\sigma_1 = \sigma_y = \frac{dp}{t}$、$\sigma_2 = \sigma_x = \frac{dp}{2t}$、$\sigma_3 = \sigma_z = 0$ としてよいから

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{dp}{t} - \frac{dp}{2t}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2t} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{dp}{t}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}d}{2t}p$$

を得る。よって、降伏条件は、

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}d}{2t}\, p \geq \sigma_Y$$

となるから、

$$p = \frac{2t}{\sqrt{3}d}\sigma_Y = \frac{2\times 1}{\sqrt{3}\times 20}\times 300 = 1.73\ \mathrm{MPa} = 17.1\text{気圧}$$

となる。