材料力学　第２週　解答例

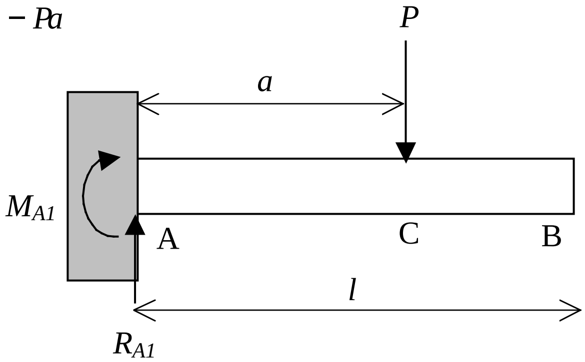
２―１.

（１）はり１について、A 点での反力 R_{A1}、反モーメント M_{A1} は以下となる。

$$R_{A1}=P\text{、}\ M_{A1}=-Pa$$

AC 間 $(0\le x\le a)$、断面に働くせん断力を $S_{1,AC}$、曲げモーメントを $M_{1,AC}$、たわみを $y_{1,AC}$ すると、

$$S_{1,AC}=R_{A1}=P\text{、}\ M_{1,AC}=R_{A1}x+M_{A1}=Px-Pa$$



$$\frac{d^2y_{1,AC}}{dx^2}=-\frac{M_{1,AC}}{EI}=-\frac{P}{EI}(x-a)$$

$$\frac{dy_{1,AC}}{dx}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)+C_1$$

$$y_{1,AC}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)+C_1x+C_2$$

となり、A点$(x=0)$でたわみ、たわみ角が０なので、$C_1=C_2=0$を得る。よって、C点でのたわみ角と、たわみは、

$$\left.\frac{dy_{1,AC}}{dx}\right|_{x=a}=\frac{Pa^2}{2EI}\text{、}\ \left.y_{1,AC}\right|_{x=a}=\frac{Pa^3}{3EI}$$

となる。

ＣＢ間（$a\le x\le l$）、断面に働くせん断力を $S_{1,CB}$、曲げモーメントを $M_{1,CB}$、たわみを $y_{1,CB}$すると、

$$S_{1,CB}=0\text{、}\ M_{1,CB}=0$$

$$\frac{dy_{1,CB}}{dx}=\left.\frac{dy_{1,AC}}{dx}\right|_{x=a}=\frac{Pa^2}{2EI}$$

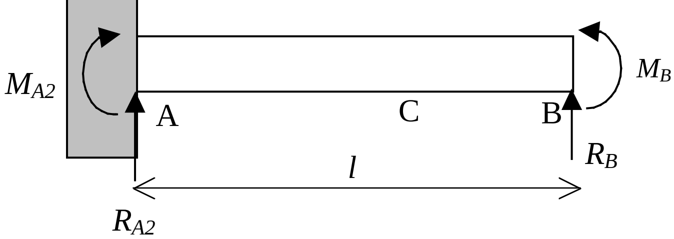
$$y_{1,CB}=\left.\frac{dy_{1,AC}}{dx}\right|_{x=a}(x-a)+\left.y_{1,AC}\right|_{x=a}=\frac{Pa^2}{2EI}(x-a)+\frac{Pa^3}{3EI}=\frac{Pa^2}{2EI}x-\frac{Pa^3}{6EI}$$

はり２について

A 点での反力を R_{A2}、反モーメントを M_{A2} とすると

$$R_{A2}=-R_B\text{、}\ M_{A2}=R_Bl+M_B$$

であり、x の位置ではりの断面にはたらくせん断力を S_2、曲げモーメントを M_2、たわみを y_2 とすると



$$S_2=R_{A2}\text{、}\ M_2=R_{A2}x+M_{A2}$$

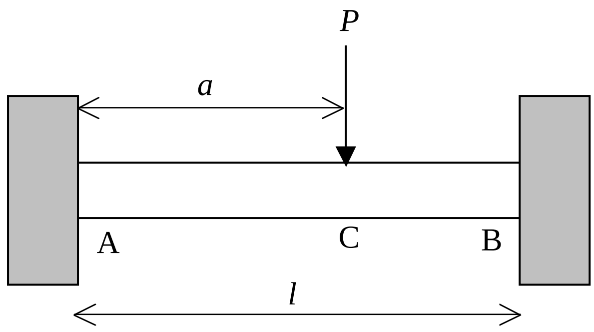
$$\frac{d^2y_2}{dx^2}=-\frac{M_2}{EI}=-\frac{1}{EI}(R_{A2}x+M_{A2})$$

となる。A 点$(x=0)$ではたわみ、たわみ角が０であることに注意して、

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{R_{A2}x^2}{2} + M_{A2}x\right)、\quad y_2 = -\frac{1}{EI}\left(\frac{R_{A2}x^3}{6} + \frac{M_{A2}x^2}{2}\right)$$

を得る。

はり１とはり２の結果を足し合わせると、B点でたわみ角が０とならなければならない。よって



$$\left.\frac{dy_{1,CB}}{dx}\right|_{x=l} + \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=l} = 0$$

より、

$$\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{1}{EI}\left(\frac{R_{A2}l^2}{2} + M_{A2}l\right) = 0$$

だから、

$$M_{A2}l = \frac{Pa^2}{2} - \frac{R_{A2}l^2}{2}$$

また、B点でたわみも０にならなければならない。よって、$\left.y_{1,CB}\right|_{x=l} + \left.y_2\right|_{x=l} = 0$より、

$$\frac{Pa^2}{2EI}l - \frac{Pa^3}{6EI} - \frac{1}{EI}\left(\frac{R_{A2}l^3}{6} + \frac{M_{A2}l^2}{2}\right) = 0$$

だから、

$$M_{A2}l = Pa^2 - \frac{Pa^3}{3l} - \frac{R_{A2}l^2}{3}$$

を得る。よって、

$$M_{A2}l = \frac{Pa^2}{2} - \frac{R_{A2}l^2}{2} = Pa^2 - \frac{Pa^3}{3l} - \frac{R_{A2}l^2}{3}$$

より、

$$\frac{R_{A2}l^2}{6} = \frac{Pa^3}{3l} - \frac{Pa^2}{2} = \frac{Pa^2(2a-3l)}{6l}、\ \therefore R_{A2} = \frac{Pa^2(2a-3l)}{l^3}、\ R_B = -\frac{Pa^2(2a-3l)}{l^3}$$

となる。また、

$$M_{A2} = \frac{Pa^2}{2l} - \frac{R_{A2}l}{2} = \frac{Pa^2}{2l} - \frac{Pa^2(2a-3l)}{2l^2} = \frac{Pa^2(l-2a+3l)}{2l^2} = \frac{Pa^2(2l-a)}{l^2}$$

$$M_B = R_A l + M_A = \frac{Pa^2(2a-3l)}{l^2} + \frac{Pa^2(l-a)}{l^2} = \frac{Pa^2(a-2l)}{l^2}$$

である。

　以上より、A点での反力は

$$R_A = R_{A1} + R_{A2} = P + \frac{Pa^2(2a-3l)}{l^3} = \frac{P(l^3 - 3la^2 + 2a^3)}{l^3}$$
$$= \frac{P\{l(l^2-a^2) - 2a^2(l-a)\}}{l^3} = \frac{P(l-a)(l^2 + la - 2a^2)}{l^3}$$
$$= \frac{P(l-a)^2(l+2a)}{l^3}$$

であり、反モーメントは、

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} = -Pa + \frac{Pa^2(2l-a)}{l^2} = -\frac{Pa(l^2 - 2al + a^2)}{l^2} = -\frac{Pa(l-a)^2}{l^2}$$

となる。

（２）（１）の結果を利用して、ＡＣ間でのたわみを y_{AC} とすると、Ａ点で固定されていることに注意して、

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{R_A x + M_A}{EI} = -\frac{P}{EI}\left\{\frac{(l-a)^2(l+2a)}{l^3}x - \frac{a(l-a)^2}{l^2}\right\}$$

$$\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{P(l-a)^2}{EIl^3}\left\{\frac{(l+2a)x^2}{2} - alx\right\}$$

$$y_{AC} = -\frac{P(l-a)^2}{EIl^3}\left\{\frac{(l+2a)x^3}{6} - \frac{alx^2}{2}\right\}$$

となる。よって、Ｃ点でのたわみ角とたわみは、

$$i_C \approx \left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{P(l-a)^2}{EIl^3}\left\{\frac{(l+2a)a^2}{2} - a^2 l\right\} = \frac{P(l-a)^2 a^2 (l-2a)}{2EIl^3}$$

$$y_C = y_{AC}\big|_{x=a} = -\frac{P(l-a)^2}{EIl^3}\left\{\frac{(l+2a)a^3}{6} - \frac{a^3 l}{2}\right\} = -\frac{P(l-a)^3 a^3}{3EIl^3}$$

となる。