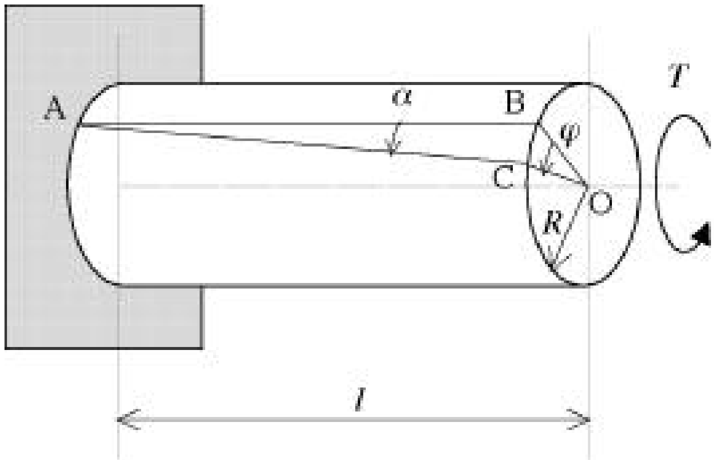
１５．軸のねじり（Twist）

１５－１．丸棒のねじり

（１）ねじりの変形とせん断ひずみ



右図のように、剛体壁に取り付けられた長さ l、半径 R の丸棒について、軸の中心のまわりにねじりモーメント T が作用すると、丸棒の外面において B 点が C 点に変位する。

このとき∠BAC をαとすると、

$$BC = AB\tan\alpha = l\tan\alpha$$

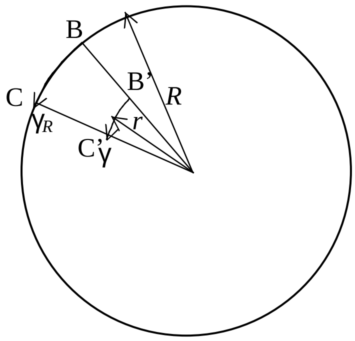
である。一方せん断ひずみの定義より、外周でのせん断ひずみを γ_R とすると、

$$\gamma_R = \frac{BC}{AB} = \tan\alpha$$

弾性変形では $BC << AB$ なので、

$$\gamma_R = \tan\alpha \approx \alpha$$

としてよい。



次に丸棒の断面について考えると、

$$BC = R\phi$$

であるから、外周でのせん断ひずみは

$$\gamma_R = \frac{BC}{AB} = \frac{R\phi}{l}$$

である。

以上より、

$$\boxed{\gamma_R = \frac{R\phi}{l} \approx \alpha}$$

を得る。ϕをねじれ角（ねじり角）という。棒の単位長さあたりのねじれ角

$$\boxed{\theta = \frac{\phi}{l}}$$

を比ねじれ角（比ねじり角）と言い、これを用いると、

$$\boxed{\gamma_R = R\theta \approx \alpha}$$

である。

丸棒の断面において、中心から r の位置では、せん断変位は

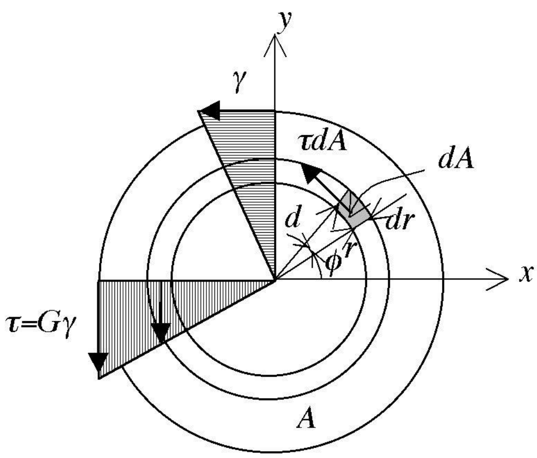
$$B'C' = r\phi$$

であるから、せん断ひずみは

$$\boxed{\gamma = \frac{B'C'}{l} = \frac{r\phi}{l} = r\theta}$$

と書ける。これから、せん断ひずみは半径に比例して大きくなることがわかる。

（２）せん断応力とトルク



フックの法則より、せん断応力は、G を剛性率（横弾性係数）とすると

$$\tau = G\gamma$$

なので、

$$\boxed{\tau = G\gamma = G\frac{r\phi}{l} = Gr\theta}$$

を得る。

次に断面に働くモーメントを考える。ねじりの場合、モーメントはトルクと呼ばれ、T であらわすことにする。

断面において、径 r から $r + dr$、及び角度φからφ+ dφの間にある微小要素の面積を dA とすると、周方向にτdA の力が作用する。この力による微小トルクは

$$dT = \tau\, dA \times r = \tau\, rdA$$

である。$\tau = Gr\theta$ であったから、上の微小トルクは

$$dT = G\theta\, r^2 dA$$

であり、全断面積について足し合わせて、トルクは

$$\boxed{T = \int_A dT = G\theta \int_A r^2 dA}$$

となる。このとき、断面二次極モーメントを

$$\boxed{I_P = \int_A r^2 dA}$$

で定義すると、トルクと比ねじれ角の関係は

$$\boxed{T = G\theta I_P} \quad \text{あるいは、} \quad \boxed{\theta = \frac{T}{GI_P}}$$

で与えられる。一方、せん断応力は、

$$\tau = G\theta r$$

で与えられたから、せん断応力とトルクの関係は

$$\boxed{\tau = \frac{T}{I_P} r}$$

となる。

断面が円の場合には、$dA = rdrd\varphi$ より、断面２次極モーメントは

$$I_P = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \times rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

であるから、

$$\boxed{T = \frac{G\theta\pi R^4}{2}}$$

となる。

１５－２．動力

外半径 R の丸棒が一定の角速度ωで回転している場合を考える。このとき、丸棒表面の任意の１点が１秒間に移動する距離 L は、

$$L = R\omega$$

である。一方、外表面に力 F が作用している場合、１秒間になされる仕事、すなわち仕事率（動力）P は

$$P = \frac{dW}{dt} = FL = FR\omega$$

となる。ここで、$T = FR$ であるから、結局

$$\boxed{P = T\omega} \quad \text{あるいは、} \quad \boxed{T = \frac{P}{\omega}}$$

となる。

１分間あたり N 回転している場合を考える。このとき棒の角速度ωは実用上

$$\omega = N \ \text{rpm (revolutions per minute)}$$

と書くことが多い。１回転は 2πラジアン（radian）の角度の回転であるので、角度で表記する１秒あたりの角速度に換算すると、

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi N}{60} \ \text{rad/s}}$$

となる。また、動力の単位として、

１馬力 = 75.0 kgf × 1 m/s = 75.0 × 9.8 N×1 m/s = 735 Nm/s = 735 J/s = 735 W

すなわち、

$$\boxed{1\text{馬力} = 735\ \text{W}}$$

を用いることが多い。

例題１）外径 $D = 10cm$、内径 $d = 8cm$、長さ $l = 6m$ のパイプがあり、2000 rpm で 400 馬力の動力を伝達している。このパイプの材料の剛性率は $G = 83.1GPa$ である。

トルク：
$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{400 \times 735\ \text{N m/s}}{\frac{2\pi \times 2000}{60}\ \text{rad/s}} = \frac{294000}{209}\ \text{N m} = 1404\ \text{N m}$$

断面２次極モーメント：

$$I_P = 2\pi\int_{d/2}^{D/2} r^3 dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{\pi}{32}(0.10^4 - 0.08^4)\ \mathrm{m}^4$$

$$= 5.80\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$

せん断応力：　$\tau = \dfrac{T}{I_P} r$

最大せん断応力：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_P}\frac{D}{2} = \frac{1404\,\mathrm{N\ m}}{5.80\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4}\frac{0.10}{2}\mathrm{m} = 12.1\times10^6\ \mathrm{N/m}^2 = 12.1\mathrm{MPa}$$

最小せん断応力

$$\tau_{\min} = \frac{T}{I_P}\frac{d}{2} = \frac{1404\,\mathrm{N\ m}}{5.80\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4}\frac{0.10}{2}\mathrm{m} = 9.69\times10^6\ \mathrm{N/m}^2 = 9.69\,\mathrm{MPa}$$

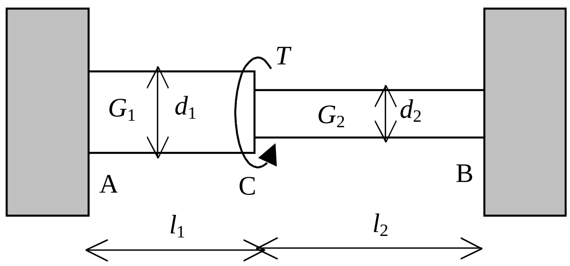
比ねじれ角

$$\theta = \frac{T}{GI_P} = \frac{\tau_{\max}}{G(D/2)} = \frac{12.1\mathrm{MPa}}{83.1\times10^3\ \mathrm{MPa}\times(0.10/2\,\mathrm{m})} = 0.00291\ \mathrm{rad/m} = 0.167°\,/\mathrm{m}$$

ねじれ角

$$\phi = l\theta = 6\,\mathrm{m}\times0.00291\mathrm{rad/m} = 0.0175 rad = 1.00°$$

例題２）【ねじりの不静定問題】



トルクのつりあい

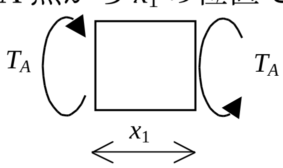
固定壁 A 点、B 点での反モーメントを T_A、T_B とすると、

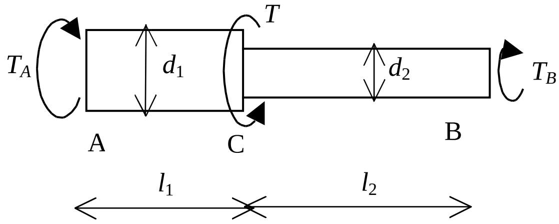
$$\boxed{T = T_A + T_B}$$

である。トルクの釣り合いしか与えられないので、不静定問題である。

AC 間

A 点から x_1 の位置での FBD は





となり、AC 間の比ねじれ角は

$$\theta_{AC} = \frac{T_A}{G_1 I_{P1}}$$

であるから、x_1 の位置でのねじれ角は

$$\phi_{AC}(x_1) = \theta_{AC}x_1 = \frac{T_A x_1}{G_1 I_{P1}}$$

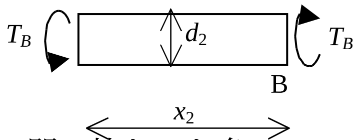
となる。よって C 点でのねじれ角は、

$$\phi_{AC}(l_1) = \theta_{AC} x_1 = \frac{T_A l_1}{G_1 I_{P1}}$$

で与えられる。

CB 間

B 点から x_2 の位置で切った時の FBD は以下のようになる。



これより、CB 間の比ねじれ角は

$$\theta_{CB} = \frac{T_B}{G_2 I_{P2}}$$

より、x_2 の位置におけるねじれ角は

$$\phi_{CB}(x_2) = \theta_{CB} x_2 = \frac{T_B x_2}{G_2 I_{P2}}$$

であり、C 点でのねじれ角は

$$\boxed{\phi_{CB}(l_2) = \theta_{CB} b = \frac{T_B l_2}{G_2 I_{P2}}}$$

である。

C 点における棒の連続より、C 点でねじれ角は一致しなければならない。よって、

$\boxed{\phi_{AC}(a) = \phi_{CB}(b)}$ だから、$\dfrac{T_A l_1}{G_1 I_{P1}} = \dfrac{T_B l_2}{G_2 I_{P2}}$

より、

$$T_B = \frac{G_2 I_{P2} l_1}{G_1 I_{P1} l_2} T_A$$

である。ここで、AC 間と BC 間の断面２次極モーメントはそれぞれ

$$I_{P1} = \frac{\pi d_1^{\ 4}}{32}、\ I_{P2} = \frac{\pi d_2^{\ 4}}{32}$$

で与えられるから、

$$T_B = \frac{G_2 d_2^{\ 4} l_1}{G_1 d_1^{\ 4} l_2} T_A$$

であり、トルクのつりあい方程式に代入すると、

$$T = T_A + T_B = \left(1 + \frac{G_2 d_2^{\ 4} l_1}{G_1 d_1^{\ 4} l_2}\right) T_A = \frac{G_1 d_1^{\ 4} l_2 + G_2 d_2^{\ 4} l}{G_1 d_1^{\ 4} l_2} T_A$$

だから、

$$T_A = \frac{G_1 d_1^{\ 4} l_2}{G_1 d_1^{\ 4} l_2 + G_2 d_2^{\ 4} l_1} T\ 、\ T_B = \frac{G_2 d_2^{\ 4} l_1}{G_1 d_1^{\ 4} l_2 + G_2 d_2^{\ 4} l_1} T$$

を得る。

例題３）【コイルばねの設計】

素線の直径 d、コイルの直径 R、長さ l のコイルばねを考える。

トルク：$T = WR$

断面２次極モーメント：$I_P = \dfrac{\pi d^4}{32}$

最大せん断応力：$\tau_{\max} = \dfrac{T}{I_P}\dfrac{d}{2} = \dfrac{16WR}{\pi d^3}$

比ねじれ角：　$\theta = \dfrac{T}{GI_P} = \dfrac{32WR}{G\pi d^4}$

dl の微小要素のねじれ角：$d\phi = \theta dl = \dfrac{32WR}{G\pi d^4}dl$

dl の微小要素のねじれによる垂直方向の変位：

$$d\delta = R\tan(d\phi) \approx Rd\phi = \frac{32WR^2}{G\pi d^4}dl$$

コイルばね全長における垂直方向の変位：

$$\delta = \int_l d\delta = \int_0^l \frac{32WR^2}{G\pi d^4}dl = \frac{32WR^2 l}{G\pi d^4}$$

ばねの法則

$$\boxed{W = k\delta}$$

より、

$$\boxed{k = \frac{G\pi d^4}{32R^2 l}}$$

あるいは、ばねの巻き数を n とすると、

$$l = n \times 2\pi R$$

より、

$$\boxed{k = \frac{Gd^4}{64nR^3}}$$

を得る。

平成１８年度　材料力学演習問題　第３週

金曜日午後１時までに提出

３－１．図３－１に示すように、直径 $d=10\,\mathrm{cm}$ 、長さ $l=4\,\mathrm{m}$ の丸棒の一端が剛体壁に固定されており、自由端 B 点で外表面に $F=50\,\mathrm{kN}$ の荷重が対になった偶力が周方向に作用している。このとき、以下の各問いに答えなさい。

（１）トルク T を求めなさい。

（２）断面２次極モーメント I_P を求めなさい。

（３）最大せん断応力 τ_{max} を求めなさい。

（４）この丸棒の材料の剛性率は $G=20\,\mathrm{GPa}$ であった。比ねじれ角 θ、ねじれ角 ϕ を求めなさい。

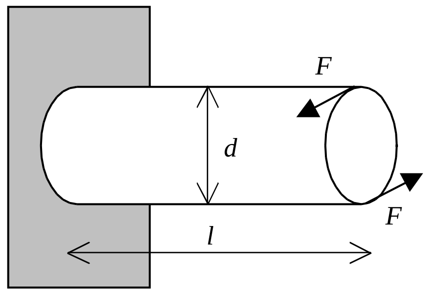


図３－１．

３－２．外径 0.50m、内径 d [m]、長さ 4m の中空丸棒がある。棒材料の剛性率は $G=81.3\,\mathrm{GPa}$ である。このとき以下の各問いに答えなさい。

（１）中空丸棒が 2000rpm で 500 馬力の動力を伝えるとき、動力 P を表す式を求めなさい。

（２）最大せん断応力 τ_{max} を表す式を求めなさい。

（３）棒材料のせん断に対する許容応力は $\tau_a=40\,\mathrm{MPa}$ である。最大せん断応力がこれ以下となるような内径を求めなさい。

３－３．図３－２に示すように、外径　D_1、内径 d_1、長さ l_1 の中空円筒１と、外径 D_2、内径 d_2、長さ l_2 の中空円筒２が C 点で剛体フランジで接合され、それぞれの他端は剛体壁（A 点、B 点）で固定されている。中空円筒１の剛性率は G_1、中空円筒の剛性率は　G_2 である。このとき、以下の各問いに答えなさい。

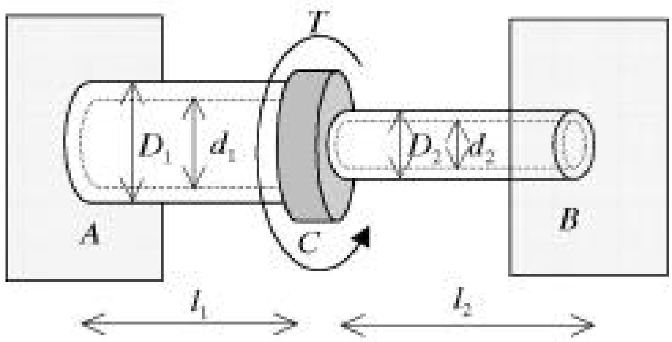


図３－２．

（１）剛体フランジ C にトルク T が作用するとき、A 点での固定トルクを T_A、B 点での固定トルクを T_B としてねじりモーメントの釣り合いを表しなさい。

（２）A 点からの距離を x_1 とするとき、AC 間のねじれ角 $\phi_{AC}(x_1)$ を求めなさい。

（３）B 点からの距離を x_2 とするとき、CB 間のねじれ角 $\phi_{CB}(x_2)$ を求めなさい。

（４）棒の連続より、C 点でのねじれ角が等しいことから、T_A、T_B を求めなさい。

（５）AC 間での最大せん断応力 $\tau_{AC,max}$、CB 間での最大せん断応力 $\tau_{CB,max}$ を求めなさい。

３－４．【自習問題・コイルばね】

直径 $d=5\,\mathrm{mm}$ の鋼（剛性率 $G=81.3\,\mathrm{GPa}$ ）の素線をコイルばねにしたとき、外径 $R=5\,\mathrm{cm}$ 、巻き数 $n=20$ であった。以下の各問いに答えよ。

（１）このばねのばね係数 k を求めなさい。

（２）鋼のせん断に対する許容応力が $\tau_a=40\,\mathrm{MPa}$ であるとき、コイルばねに付加できる最大荷重　W_{max} とそのときのばねの変位 δ_{max} を求めなさい。