材料力学　演習問題　第４週
提出　金曜日午後１時まで

４－１．長さ 2 m、直径 10 cm、内径 9 cm のステンレス鋼製パイプ（ヤング率 200GPa）がある。
（１）パイプの一端が天井に垂直に固定されてつるされており、他端には 5kN の重さの剛体フランジが取り付けられている。パイプに蓄えられる弾性エネルギー及び単位体積あたりの弾性エネルギーを求めよ。
（２）（１）のパイプにおいて、剛体フランジに 1m の高さから 5kN の荷重を有する剛体を落下したとき、パイプの衝撃応力を求めよ。
（３）パイプの一端を剛体壁に垂直に固定し、自由端に 5 kN の荷重を付加したとき、パイプに蓄えられる弾性エネルギーを求めよ。
（４）（３）の片持ちはりにおいて、自由端に 5kN の荷重を 1m の高さから落下したとき、衝撃時の自由端のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めよ。

４－２．高さ 10 cm、直径 5 cm のガラス製ロッド（ヤング率 70GPa）が床においてある。このガラスの圧縮時の破壊強度は$\sigma_f = 1GPa$である。
（１）安全率を$S = 10$として許容応力σ_aを求めなさい。
（２）このガラスの上面に、荷重 10kg の剛体を落下するとき、許容応力以下の衝撃応力となる高さ h を求めなさい。

３．両端を固定壁に固定されている長さ 2mのステンレス鋼製のはりがある。はりの断面の幅は 3 cm、高さは 2 cm である。ステンレス鋼のヤング率は 200GPa である。このとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）はりの中央に 10 kN の荷重を付加したとき、はりに蓄えられる弾性エネルギーU、はりの中央のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めなさい。
（２）はりの中央に 10 cm の高さから 10kN の荷重の物体を落下したとき、はりに蓄えられる弾性エネルギーU、はりの中央のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めなさい。

解答例

4—1．

（1）

$$U_s=\frac{1}{2}W\lambda=\frac{\sigma^2}{2E}Al=\frac{W^2 l}{2EA}=\frac{(5\times10^3\,\mathrm{N})^2\times 2\,\mathrm{m}}{2\times200\times10^9\,\mathrm{N/m^2}\times\pi(0.05^2-0.045^2)\,\mathrm{m^2}}$$

$$=0.0838\,\mathrm{N\ m}=0.0838\,\mathrm{J}$$

$$u_s=\frac{U_s}{Al}=\frac{0.0838\,\mathrm{J}}{\pi(0.05^2-0.045^2)\,\mathrm{m^2}\times 2\,\mathrm{m}}=28.1\,\mathrm{J/m^3}$$

（2）

$$U=W(h+\lambda)=\frac{P\lambda}{2}\ \text{より、}\ W\left(h+\frac{\sigma l}{E}\right)=\frac{\sigma^2}{2E}Al\text{、}\ \therefore \sigma^2-2\frac{\sigma W}{A}-2\frac{WEh}{Al}=0$$

これより、

$$\sigma=\frac{W}{A}+\sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2+2\frac{WEh}{Al}}=\frac{W}{A}+\frac{W}{A}\sqrt{1+2\frac{EAh}{Wl}}$$

$$=\frac{5000\,\mathrm{N}}{\pi(0.05^2-0.045^2)\mathrm{m^2}}\left(1+\sqrt{1+2\times\frac{200\times10^9\,\mathrm{N/m^2}\times\pi(0.05^2-0.045^2)\,\mathrm{m^2}\times1\,\mathrm{m}}{5\times10^3\,\mathrm{N}\times2\,\mathrm{m}}}\right)$$

$$=87.9\,\mathrm{MPa}$$

となる。

（3）中立軸周りの断面２次モーメント

$$I=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=\frac{\pi}{64}(0.10^4-0.09^4)\,\mathrm{m^4}=1.69\times10^{-6}\,\mathrm{m^4}$$、D：外径、d：内径

より、曲げ剛性は

$$EI=3.38\times10^5\,\mathrm{N\ m^2}$$

Ｂ点でのたわみ

$$\delta_s=\frac{Wl^3}{3EI}=\frac{5000\,\mathrm{N}\times2^3\,\mathrm{m^3}}{3\times3.38\times10^5\,\mathrm{N\ m^2}}=0.0395\,\mathrm{m}$$

より

$$U_s=\frac{1}{2}W\delta=\frac{5000\,\mathrm{N}\times0.0395\,\mathrm{m}}{2}=197\,\mathrm{J}$$

（4）$U=W(h+\delta)=\dfrac{P\delta}{2}$、ここで、$\delta=\dfrac{Pl^3}{3EI}$ より、

$$W\left(h+\frac{Pl^3}{3EI}\right)=\frac{P^2l^3}{6EI}\text{、}\ P^2-2PW-\frac{6EIWh}{l^3}=0\text{、}$$

$$P = W + \sqrt{W^2 + \frac{6EIWh}{l^3}} = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Wl^3}}\right)$$

$$\therefore \quad = 5000\,\mathrm{N}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6\times 3.38\times 10^5\times 1}{5000\times 2^3}}\right)$$

$$= 5000\,\mathrm{N}\times 8.19 = 40.9\,\mathrm{kN}$$

同様にして、

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Wl^3}{3EI}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Wl^3}}\right) = \delta_s\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Wl^3}}\right) = 0.0395\,\mathrm{m}\times 8.19 = 0.323\,\mathrm{m}$$

$$M_{\max} = Pl$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I}\frac{D}{2} = \frac{Pl}{I}\frac{D}{2} = \frac{40.9\times 10^3\times 2}{1.69\times 10^{-6}}\frac{0.10}{2} = 2.42\,\mathrm{GPa}$$

を得る。

4—2.

（1）$\sigma_a = \dfrac{\sigma_f}{S} = \dfrac{1000\mathrm{MPa}}{10} = 100\mathrm{GPa}$

（2）$U = W(h+\lambda) = \dfrac{P\lambda}{2}$ より、$W(h + \dfrac{\sigma l}{E}) = \dfrac{\sigma^2}{2E}Al$ だから、

$$h = \frac{\sigma_a^{\,2}Al}{2WE} - \frac{\sigma_a l}{E} = \frac{(100\times 10^6)^2\,\mathrm{N^2/m^4}\times\pi\times 0.05^2\,\mathrm{m}\times 2\,\mathrm{m}}{2\times 10\mathrm{kgf}\times 9.8\mathrm{N}\times 70\times 10^9\,\mathrm{N/m^2}} - \frac{100\times 10^6\,\mathrm{N/m^2}\times 2\mathrm{m}}{70\times 10^9\,\mathrm{N/m^2}}$$

$$= 11.4\mathrm{m}$$

4—3.

（1）固定端 A 点での反力を R_A、反モーメントを M_A とすると、左右対称より、はりの中央に作用する荷重を W として、

$$R_A = \frac{W}{2}$$

であり、A 点から x の位置での曲げモーメントは

$$M_x = R_A x + M_A = \frac{Wx}{2} + M_A$$

となる。よって、AC 間のたわみの式は、固定端 A 点でたわみ、たわみ角が０であることを考慮して、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wx}{2} + M_A\right)、\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wx^2}{4} + M_A x\right)、\quad y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wx^3}{12} + \frac{M_A x^2}{2}\right)$$

となる。C点でたわみは最大であり、たわみ角は０であるから、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l/2} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wl^2}{16} + \frac{M_A l}{2}\right) = 0、\quad \therefore M_A = -\frac{Wl}{8}$$

であり、C点でのたわみは

$$\delta_s = y\Big|_{x=l/2} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wl^3}{96} - \frac{Wl^3}{64}\right) = \frac{Wl^3}{192EI}$$

となる。

　ここで、

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.03 \times 0.02^3}{12} = 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

$$EI = 200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-8} = 4000\,\mathrm{N \cdot m^2}$$

より、

$$\delta_s = \frac{10000\,\mathrm{N} \times 2^3\,\mathrm{m}^3}{192 \times 4000\,\mathrm{Nm^2}} = 0.104\,\mathrm{m}$$

となる。弾性エネルギーは

$$U_s = \frac{W\delta_s}{2} = \frac{10000\,\mathrm{N} \times 0.104\,\mathrm{m}}{2} = 520\,\mathrm{J}$$

となる。また最大の曲げモーメントは固定端 A 点と中央の C 点で発生し、

$$M_{s,\max} = \left|M_x\big|_{x=0}\right| = \left|M_x\big|_{x=l/2}\right| = \frac{Wl}{8}$$

である。これより、曲げ応力は

$$\sigma_{s,\max} = \frac{M_{\max}}{I}\frac{h}{2} = \frac{10000\,\mathrm{N} \times 2\,\mathrm{m}}{8 \times 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^4}\frac{0.02\,\mathrm{m}}{2} = 1.25\,GPa$$

（2）

$$W(h+\delta) = \frac{P\delta}{2}、\delta = \frac{Pl^3}{192EI} = \alpha P,\ \ \alpha = \frac{l^3}{192EI}\ \text{より、}\ \alpha P^2 - 2W\alpha P - 2Wh = 0$$

これから、

$$P = W + \sqrt{W^2 + \frac{2Wh}{\alpha}} = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\alpha W}}\right) = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}}\right)$$

となる。ここで、

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.1\,\mathrm{m}}{0.104\,\mathrm{m}}} = 2.71$$

となる。従って、衝撃荷重は

$$P = 10\,\mathrm{kN} \times 2.71 = 27.1\,\mathrm{kN}$$

また、C点でのたわみも

$$\delta = 2.71\delta_s = 2.71 \times 0.104\,\mathrm{m} = 0.282\,\mathrm{m}$$

より、

$$U = \frac{27.1 \times 10^3\,\mathrm{N} \times 0.282\,\mathrm{m}}{2} = 3821\,\mathrm{J}$$

を得る。また、

$$\sigma_{\max} = 2.71\sigma_{s,\max} = 3.39\,GPa$$

である。