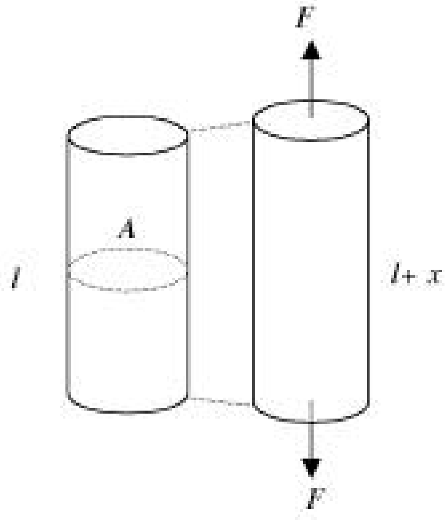
１７章　弾性エネルギーと衝撃応力

１７－１．弾性エネルギー（elastic energy）



　長さ l の棒に引張荷重 F を付加したときの伸びがλであるとき、弾性変形の場合、ばねの法則が成り立ち、

$$F = kx$$

となる。さらに荷重を微小量 dF だけ増すと伸びも微小量 dx だけ増し、

$$F + dF = k(x + dx)$$

となる。このときなされた仕事は

$$dU = \frac{F + (F + dF)}{2} \times dx = Fdx + \frac{dFdx}{2}$$

であるが、 $dx \to 0$ のときには、 $dx \to 0$ で２次の微小項を無視してよいから

$$dU = Fdx$$

である。すなわち、力のなす仕事の変化は

（仕事の変化）＝（力）×（変位）

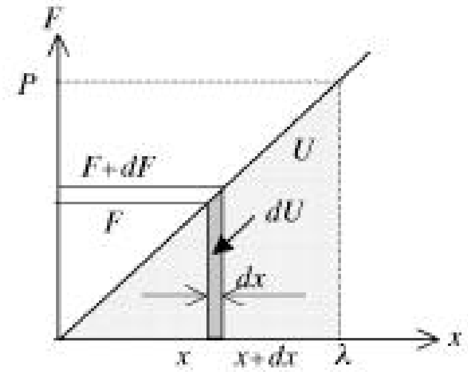
である。これにばねの法則を入れると、

$$dU = kxdx$$

となる。よって、伸びがλとなるまでになされる仕事は、

$$U = \int_{\lambda} dU = \int_{0}^{\lambda} k\lambda d\lambda = \frac{k\lambda^2}{2}$$

である。このように、力が作用し材料が弾性変形する際に、材料になされる仕事は、材料にエネルギーとして蓄えられる。このエネルギーのことを弾性エネルギー（ひずみエネルギー、あるいは弾性ひずみエネルギーともいう）



荷重－伸び線図と弾性エネルギーの関係

　ここで、伸びλの時の荷重を P とすると、

$$P = k\lambda$$

であるから、材料に蓄えられる弾性エネルギーは

$$U = \frac{k\lambda^2}{2} = \frac{P^2}{2k} = \frac{P\lambda}{2}$$

であって、荷重－伸び線図において囲まれる三角形の面積になる。

　次に、単位体積あたりの弾性エネルギーを求めよう。材料の体積は $V = Al$ であたえられるから、

$$u=\frac{U}{V}=\frac{P\lambda}{2Al}$$

ここで応力ならびにひずみの定義より、

$$\sigma=\frac{F}{A}、\ \varepsilon=\frac{\lambda}{l}$$

であるから、単位体積あたりの弾性エネルギー（弾性エネルギー密度とも言う）は

$$u=\frac{\sigma\varepsilon}{2}$$

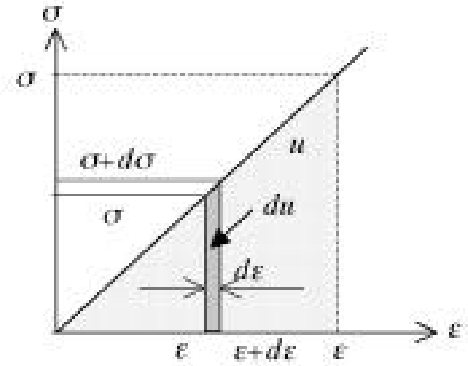
となる。フックの法則より

$$\sigma=E\varepsilon$$

であるから、単位体積あたりの弾性エネルギーは

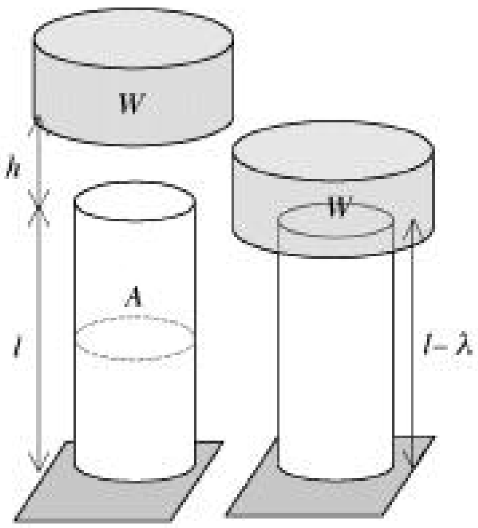
$$u=\frac{E\varepsilon^2}{2}=\frac{\sigma\varepsilon}{2}=\frac{\sigma^2}{2E}$$

とも書ける。



応力－ひずみ線図と弾性エネルギー密度の関係

１７－２．衝撃応力（impact stress）



剛体の床に固定された長さ l、断面積 A の棒に、上端から高さ h の位置から重さ W の剛体が落とされた場合を考える。剛体は棒に衝突し、棒の長さは λだけ縮む。このときに剛体の位置エネルギーは

$$U_p=W(h+\lambda)$$

だけ減少する。一方、材料に付加される荷重を P とすると、λだけ縮んだ際に蓄えられる弾性エネルギーは

$$U_e=\frac{P\lambda}{2}$$

である。剛体の位置エネルギー変化は、材料の変形に要した仕事であるから、

$$U_p=U_e、\ \therefore W(h+\lambda)=\frac{P\lambda}{2}$$

が成り立つ。あるいは、応力をσ、ひずみをεとすると、

$$P=\sigma A、\ \lambda=l\varepsilon、\ \sigma=E\varepsilon$$

より、

$$\Delta U_p=W(h+l\varepsilon)=W\left(h+\frac{l\sigma}{E}\right)、\ \Delta U_e=Al\frac{\sigma\varepsilon}{2}=Al\frac{\sigma^2}{2E}$$

であるから、

$$W\left(h+\frac{l\sigma}{E}\right)=Al\frac{\sigma^2}{2E}$$

を得る。よって、

$$\sigma^2-2\frac{W}{A}\sigma-2\frac{EW}{Al}h=0$$

である。ここで、静的に荷重を付加したときの応力は

$$\sigma_s=\frac{W}{A}$$

で表されるから、

$$\sigma^2-2\sigma_s\sigma-2\frac{\sigma_s Eh}{l}=0$$

と書ける。これより、衝撃を受けたときの応力、すなわち、衝撃応力は

$$\sigma=\sigma_s+\sqrt{\sigma_s^2+2\frac{\sigma_s Eh}{l}}=\sigma_s\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)$$

であり、そのときのひずみは

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{\sigma_s}{E}\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)=\varepsilon_s\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)$$

となる。ただし、$\varepsilon_s=\sigma_s/E$ は静的ひずみである。

また、衝撃荷重は

$$P=\sigma A=\sigma_s A\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)=W\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)$$

であり、そのときの縮みは、

$$\lambda=\varepsilon l=\varepsilon_s l\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)=\lambda_s\left(1+\sqrt{1+2\frac{Eh}{\sigma_s l}}\right)$$

となる。ここで、$\lambda_s=\varepsilon_s l$ は静的縮みである。

（1）$h\approx 0$ のとき

$$\sigma\approx 2\sigma_s$$

であり、衝撃応力は静的応力の 2 倍になる。同様に、衝撃時のひずみ、荷重、縮みは全て静的な場合の 2 倍になる。

（2）$Eh>>\sigma_s l$ のとき、

$$\sigma = \sigma_s \left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{Eh}{\sigma_s l}} \right) \approx \sqrt{2\frac{\sigma_s Eh}{l}}$$

となり、落下高さの平方根に比例して増加する。同様のことは、衝撃時のひずみ、荷重、縮みについて成り立つ。

例題１）せん断変形の場合、単位体積あたりの弾性エネルギーは、

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$$

であることを示せ。

せん断変形におけるばねの法則が

$$F = k_s x$$

で表されるとき、弾性エネルギーは

$$U = \int_0^\lambda F dx = \int_0^\lambda k_s x dx = \frac{k_s \lambda^2}{2}$$

である。ここで、せん断変位λのときのせん断力をF_λとすると、

$$F_\lambda = k_s \lambda$$

であるから、

$$U = \frac{F_\lambda \lambda}{2}$$

である。これを体積で割ると、

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F_\lambda \lambda}{2Al} = \frac{\tau\gamma}{2}$$

となり、せん断変形に対するフックの法則$\tau = G\gamma$より、

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$$

を得る。

例題２）剛体壁に固定された長さlの片持ちはり（曲げ剛性EI）の自由端に荷重Pが作用しているとき、はりに蓄えられる弾性エネルギーを求めよ。

自由端のたわみをδとすると、はりに蓄積された弾性エネルギーは、

$$U = \frac{P\delta}{2}$$

である。自由端のたわみは、

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

なので、

$$U=\frac{P^2l^3}{6EI}$$

となる。

【別解】この別解では、はり中の曲げ応力に基づいて弾性エネルギーを求める。曲げ応力は位置によって変化するので、弾性エネルギー密度もまた位置の関数であることに注意しなさい。また、結果的に表れるはり全体の弾性エネルギーは、上の解で求めたものと一致することに注意しなさい。

固定端から x の位置における曲げモーメントは

$$M_x=-P(l-x)$$

であり、中立軸から y の位置における曲げ応力は

$$\sigma=\frac{M_x}{I}y=-\frac{P}{I}(l-x)y$$

である。よって、はり中において(x, y)の位置にある微小要素の弾性エネルギー密度は、

$$u=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{P^2}{2EI^2}(l-x)^2y^2$$

となる。はりの断面において、y～$y+dy$ にある微小要素の面積を dA とすると、この微小断面にはさまれる x～$x+dx$ の微小体積 dV は

$$dV=dAdx$$

である。この dV の微小体積に蓄積されている弾性エネルギーは udV であるから、これらを全体積 V にわたって足し合わせ、

$$U=\int_V udV=\int_0^l\int_A\frac{P^2}{2EI^2}(l-x)^2y^2dAdx=\frac{P^2}{2EI^2}\int_0^l(l-x)^2dx\int_A y^2dA=\frac{P^2}{2EI^2}\times\frac{l^3}{3}\times I$$
$$=\frac{P^2l^3}{6EI}$$

となる。

例題３）剛体壁に固定された片持ちはりの自由端に、高さ h から重さ W の剛体が落下された。このときの自由端のたわみならびに最大曲げ応力を求めなさい。

材料力学　演習問題　第４週
提出　金曜日午後１時まで

４－１．長さ 2 m、直径 10 cm、内径 9 cm のステンレス鋼製パイプ（ヤング率 200GPa）がある。
（１）パイプの一端が天井に垂直に固定されてつるされており、他端には 5kN の重さの剛体フランジが取り付けられている。パイプに蓄えられる弾性エネルギー及び単位体積あたりの弾性エネルギーを求めよ。
（２）（１）のパイプにおいて、剛体フランジに 1m の高さから 5kN の荷重を有する剛体を落下したとき、パイプの衝撃応力を求めよ。
（３）パイプの一端を剛体壁に垂直に固定し、自由端に 5 kN の荷重を付加したとき、パイプに蓄えられる弾性エネルギーを求めよ。
（４）（３）の片持ちはりにおいて、自由端に5kN の荷重を 1m の高さから落下したとき、衝撃時の自由端のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めよ。

４－２．高さ 10 cm、直径 5 cm のガラス製ロッド（ヤング率 70GPa）が床においてある。このガラスの圧縮時の破壊強度は$\sigma_f = 1GPa$である。
（１）安全率を$S = 10$として許容応力σ_aを求めなさい。
（２）このガラスの上面に、荷重 10kg の剛体を落下するとき、許容応力以下の衝撃応力となる高さ h を求めなさい。

３．両端を固定壁に固定されている長さ 2mのステンレス鋼製のはりがある。はりの断面の幅は 3 cm、高さは 2 cm である。ステンレス鋼のヤング率は200GPa である。このとき、以下の各問いに答えなさい。
（１）はりの中央に 10 kN の荷重を付加したとき、はりに蓄えられる弾性エネルギーU、はりの中央のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めなさい。
（２）はりの中央に 10 cm の高さから 10kN の荷重の物体を落下したとき、はりに蓄えられる弾性エネルギーU、はりの中央のたわみδならびに最大曲げ応力σ_{max}を求めなさい。