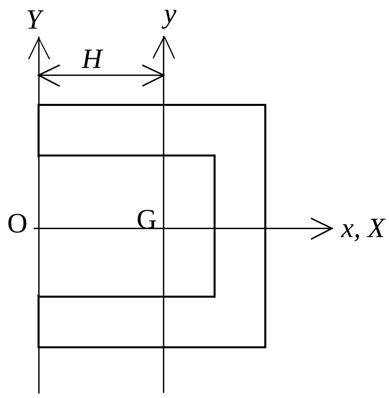
問題２

（１）まず座屈が起こる方向を定めなければならないので、断面２次モーメントを求める。

断面形状の上下方向の対称性から、図心 G は中央の高さにある。よって、図心 G を通る x 軸周りの断面２次モーメント I_x は、



$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A y^2 dA \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 h dy - \int_{-h/2+t}^{h/2-t} y^2 (h-t) dy \\
&= \frac{h^4}{12} - \frac{(h-t)(h-2t)^3}{12}
\end{aligned}
$$

となる。

次に、断面の左辺を通る Y 軸の周りの断面１次モーメント J_Y を求めると、Y 軸上の点Oを通る X 軸を用いて、

$$
\begin{aligned}
J_Y &= \int_A X dA = \int_0^h X h dX - \int_0^{h-t} X(h-2t) dX \\
&= \frac{h^3}{2} - \frac{(h-t)^2(h-2t)}{2}
\end{aligned}
$$

であり、断面積は $A = h^2 - (h-2t)(h-t)$ であるから、O点から図心Gまでの距離 H は、

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{J_Y}{A} = \frac{h^3 - (h-t)^2(h-2t)}{2\{h^2 - (h-2t)(h-t)\}} \\
&= \frac{h\{h^2 - (h-2t)(h-t)\} + h(h-2t)(h-t) - (h-t)^2(h-2t)}{2\{h^2 - (h-2t)(h-t)\}} \\
&= \frac{h}{2} + \frac{(h-2t)(h-t)}{2(3h-2t)}
\end{aligned}
$$

である。また、Y 軸周りの断面２次モーメントは、

$$
I_Y = \int_A X^2 dA = \int_0^h X^2 h dX - \int_0^{h-t} X^2 (h-2t) dX = \frac{h^4}{3} - \frac{(h-t)^3(h-2t)}{3}
$$

となる。これらより、図心 G を通る y 軸周りのモーメントは、

$$
\begin{aligned}
I_y &= \int_A x^2 dA = \int_A (X-H)^2 dA = \int_A X^2 dA - 2H \int_A X dA + H^2 \int_A dA \\
&= I_Y - 2HJ_Y + H^2 A = I_Y - H^2 A \\
&= \frac{h^4}{3} - \frac{(h-t)^3(h-2t)}{3} - \left\{\frac{h}{2} + \frac{(h-2t)(h-t)}{2(3h-2t)}\right\}^2 \{h^2 - (h-2t)(h-t)\} \\
&= \frac{h^4}{3} - \frac{(h-t)^3(h-2t)}{3} - \left\{\frac{h}{2} + \frac{(h-2t)(h-t)}{2(3h-2t)}\right\}^2 t(3h-2t) \\
&= \frac{h^4}{12}\left[4 - 4(1-\xi)^3(1-2\xi) - 3\left\{1 + \frac{(1-2\xi)(1-\xi)}{3-2\xi}\right\}^2 \xi(3-2\xi)\right]
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで、$\xi = t/h$ である。

同様にして x 軸周りの断面２次モーメントについても、$\xi = t/h$をもちいて、

$$I_x = \frac{h^4}{12} - \frac{(h-t)(h-2t)^3}{12} = \frac{h^4}{12}\{1-(1-\xi)(1-2\xi)^3\}$$

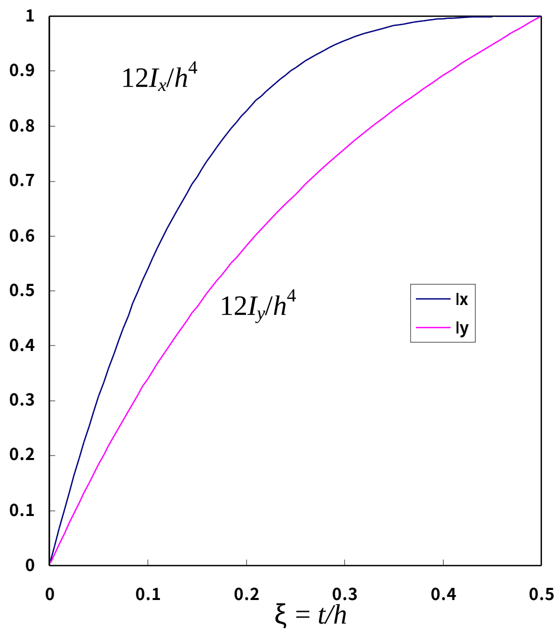
で与えられる。$0 < t < h/2$ の値をとるので、$0 < \xi < 0.5$である。I_x と I_y のいずれが大きいかをこの範囲で解析的に確かめるのは面倒なので、ここでは数値計算を行う。諸君はいくつか代表的な値を求めてグラフ化し、I_x と I_y の大きさを比較すればよい。

右図は、$12I_x/h^4$ と$12I_y/h^4$をξの関数として計算したものをグラフにしたものである。このグラフから、t の取り得るすべての範囲に渡って、

$$I_x > I_y$$

となる。

よって、座屈は y 軸の回りにおきやすいことになる。このことから、臨界座屈荷重は



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2}$$

で与えられ、臨界座屈応力は、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2 t(3h-2t)}$$

となる。ここで、

$$I_y = \frac{h^4}{12} f(\xi) \quad ただし、\quad f(\xi) = 4 - 4(1-\xi)^3(1-2\xi) - 3\left\{1 + \frac{(1-2\xi)(1-\xi)}{3-2\xi}\right\}^2 \xi(3-2\xi)$$

$$\xi = \frac{t}{h}$$

である。

（2）$\xi = 5mm/5cm = 0.1$であるので、数値を代入して $f(0.1) = 0.34$ を得る。よって臨界座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} = \frac{0.34\pi^2 E h^4}{12 l^2} = \frac{0.34\pi^2 \times 206 \times 10^9 \times 0.05^4}{12 \times 3^2} = 40.0\,\mathrm{kN}$$

あり、臨界座屈応力は、

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{P_{cr}}{t(3h-2t)} = \frac{40.0\mathrm{kN}}{0.005 \times (3 \times 0.05 - 2 \times 0.005)} = 57.1\mathrm{MPa}$$

となる。細長比は定義により、以下のように与えられる。

$$\frac{l}{k} = l\sqrt{\frac{A}{I_y}} = l\sqrt{\frac{12t(3h-2t)}{0.34h^4}} = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{12\xi(3-2\xi)}{0.34}} = \frac{3}{0.05}\sqrt{\frac{12 \times 0.1 \times (3-2 \times 0.1)}{0.34}} = 189$$

（３）（２）の結果より、座屈が生じるためには、衝撃荷重が 40 kN であればよい。ここで、衝撃荷重を P_{im} とおく。衝撃時の棒の縮みをλとすると、

$$W(h+\lambda)=\frac{P_{im}\lambda}{2}$$

である。ここで、

$$\lambda=l\varepsilon=\frac{\sigma l}{E}=\frac{P_{im}l}{AE}$$

なので、

$$W\left(h+\frac{P_{im}l}{AE}\right)=\frac{P_{im}^{2}l}{2AE}$$

より、

$$W=\frac{\dfrac{P_{im}^{2}l}{2AE}}{h+\dfrac{P_{im}l}{AE}}=\frac{P_{im}}{2}\frac{1}{1+\dfrac{AEh}{P_{im}l}}$$

$$=\frac{40\times10^{3}\,\mathrm{N}}{2}\frac{1}{1+\dfrac{0.005\times(3\times0.05-2\times0.005)\,\mathrm{m}^{2}\times206\times10^{9}\,\mathrm{N/m^{2}}\times1\mathrm{m}}{40\times10^{3}\,\mathrm{N}\times3\mathrm{m}}}$$

$$=16.6\,\mathrm{N}=1.7\mathrm{kgf}$$

を得る。