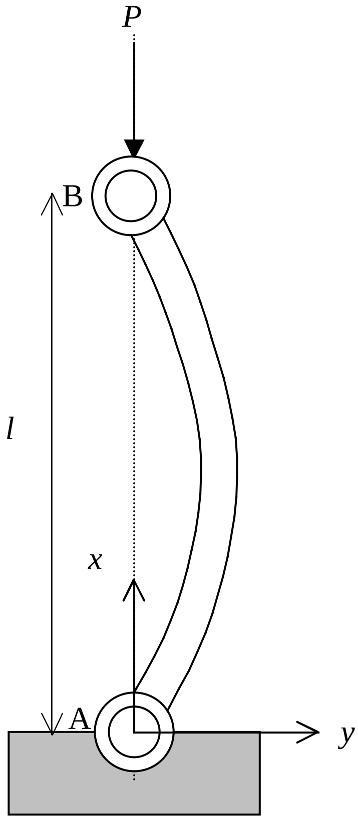
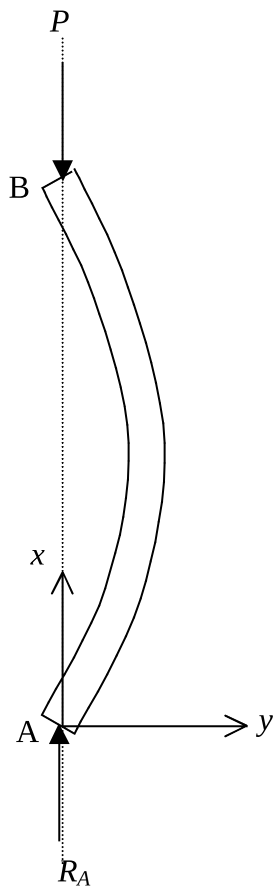
１８章　長柱の座屈（buckling）

１８—１．両端が回転支持の場合の座屈





　右図のように、長さｌの長柱があり両端は回転支持されているものの、水平方向の移動が禁止されている場合に、長柱の軸に沿って荷重 P が付加される問題を考える。荷重が小さい間は、長柱は真っ直ぐであるが、ある荷重を越えると、右図のようにたわむ。この現象を座屈という。座屈の問題を考えるには、実際にたわんだ状態での曲げモーメントを考えなければならない。

　たわんだ長柱だけを取り出した自由体線図を考えると、A 点での反力は

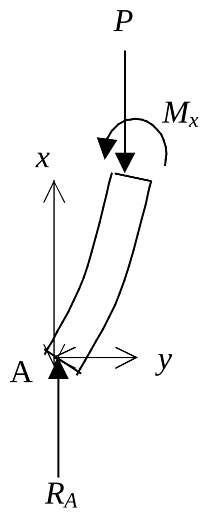
$$R_A = P$$

である。A 点から x の位置での曲げモーメントは、

$$M_x = R_A y = Py$$

である。これより、たわみの式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y$$



となる。この方程式を解くために、$y = e^{\lambda x}$ とおくと、$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ より、特性方程式、

$$\lambda^2 + \frac{P}{EI} = 0$$

を得る。よって、

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{P}{EI}}\,i$$

である。一般解は、

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} = c_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + c_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$$

となる。

A 点と B 点ではたわみがないことから、境界条件

$$y\big|_{x=0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$y\big|_{x=l} = c_1\left\{\exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right) - \exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right)\right\} = 2ic_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right) = 0$$

を得る。$c_1 = -c_2 \neq 0$ であるためには、

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right) = 0$$

より、

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l = n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots$$

となる。ここで、$n = 0$ はたわみのない状況を表すから省かれる。

以上より、

$$P = k^2 EI = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

となる。これをオイラーの座屈荷重という。座屈荷重の内、最も小さいのは $n = 1$ のときであり、この臨界座屈荷重は、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

で与えられる。座屈応力は、断面積を A とすると、

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

で与えられる。ここで、

$$k^2 = \frac{A}{I}$$

座屈応力は

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/k)^2}$$

であり、l/k を細長比と呼ぶ。幅 b、高さ h の断面（ただし $b>h$）のとき、

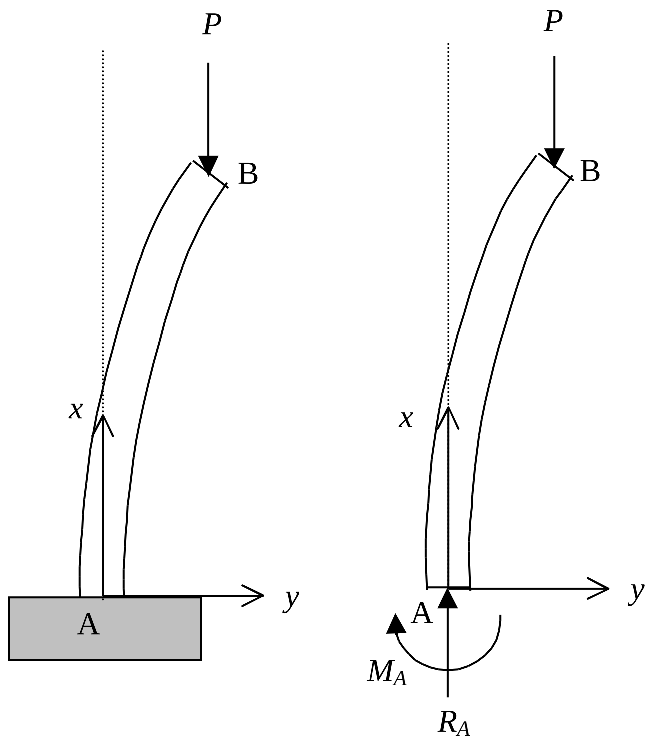
$$k = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

であるから、細長比は

$$\frac{l}{k} = \frac{2\sqrt{3}l}{h}$$

となり、長さと断面サイズの比を表すことがわかる。

１８—２．片持ちはりタイプの長柱の座屈



　右図のように、一端が固定され、自由端に圧縮荷重が付加されて、座屈が生じる場合を考える。このとき、はりの自由体において、A 点での反力と反モーメントは

$$R_A = P$$

$$M_A = -P\delta$$

となる。よって、x の位置での曲げモーメントは、

$$M_x = R_A y + M_A = Py - P\delta$$

である。これより、たわみの式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}y + \frac{P}{EI}\delta$$

となる。この解は、$Y = y - \delta$とおくと、

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}Y$$

より、１７—１の結果を用いて

$$Y = c_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

で与えられる。よって、

$$y = c_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

を得る。

A 点で固定されているので

$$y\Big|_{x=0} = c_1 + c_2 + \delta = 0$$

また、

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{\frac{P}{EI}}\left\{c_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - c_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right\}$$

だから、

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = i\sqrt{\frac{P}{EI}}(c_1 - c_2) = 0$$

となる。以上より、

$$c_1 = c_2 = -\frac{\delta}{2}$$

だから、

$$y = -\frac{\delta}{2}\exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - \frac{\delta}{2}\exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta = \delta\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right\}$$

となる。さらには、B 点でのたわみがδなので、

$$y\Big|_{x=l} = \delta\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}l\right)\right\} = \delta$$

より、

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l\right)=0$$

となる。これより、

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l=\frac{2n-1}{2}\pi,\quad n=1,2,\cdots$$

であり、座屈荷重は

$$P=\frac{(2n-1)^2\pi^2EI}{4l^2},\quad n=1,2,\cdots$$

また、臨界座屈荷重は、

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4l^2}$$

座屈応力は

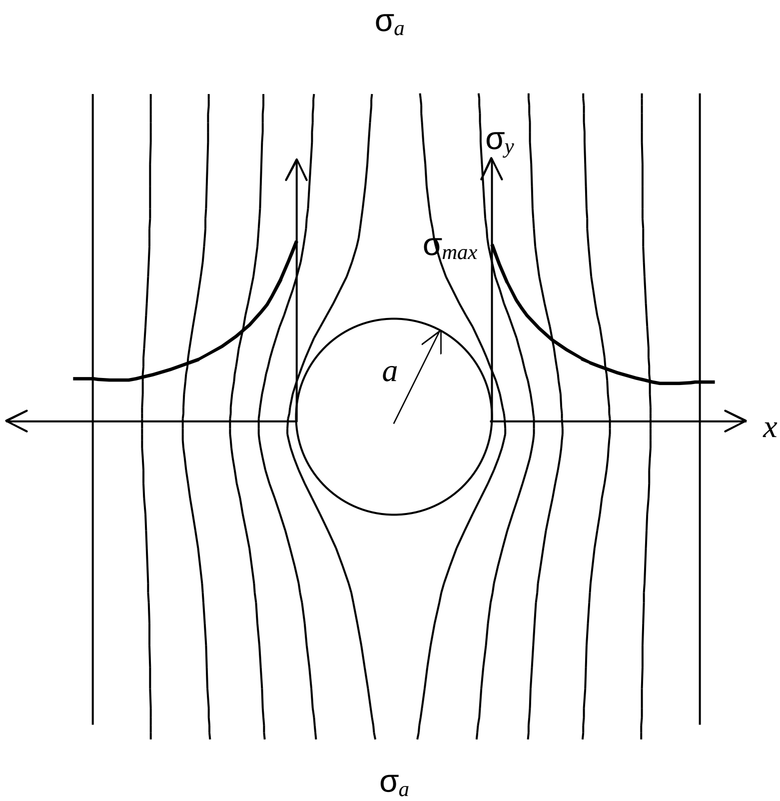
$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4Al^2}=\frac{\pi^2E}{4(l/k)^2}$$

で与えられる。

１９章　応力集中

１９—１．応力集中と応力集中係数

（１）円孔



　平板に半径 a の孔が空けられている場合、平板の大きさが孔の直径よりも十分に大きければ、無限平板とみなすことができる。このとき、平板に付加された応力は、平板を構成する原子間の結合によって伝達されるが、孔の部分には原子がないため、応力は孔を迂回するように伝達される。その結果、孔の回りには付加された応力よりも高い応力場が形成される。この現象を応力集中（stress concentration）という。

　もっとも高い応力は、円孔の周に生じ、

$$\sigma_{\max} = 3\sigma_a$$

となる。ここで、σ_a は外部付加応力である。この導出は、弾性力学で行われる。

　一般に、材料中に欠陥や傷あるいは形状に不均一さがあると、応力集中が生じ、

$$\sigma_{\max} = k\sigma_a$$

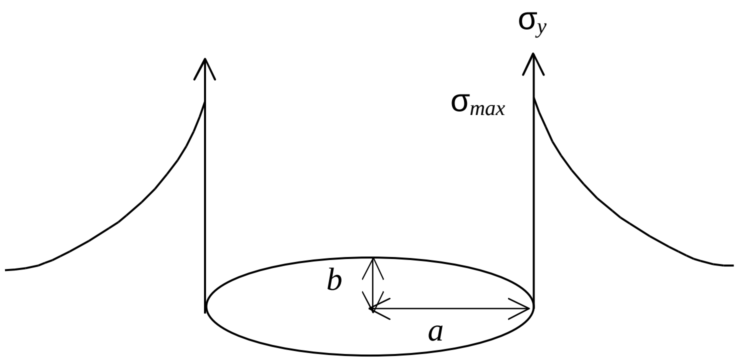
で表され、k は応力集中係数（stress intensity factor）と呼ばれる。

（２）楕円孔

　楕円孔においては、最大の応力は、長軸側の周に生じ、

$$\sigma_{\max} = \left(1 + \frac{2a}{b}\right)\sigma_a、\quad k = 1 + 2\frac{a}{b}$$

となる。これも弾性力学で導出される。また、



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

より、

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

だから

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{b^4 x^2}{a^4 y^3}$$

であるので、曲率半径をρとすると、

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y / dx^2}{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}} = \frac{\dfrac{b^2}{a^2 y} + \dfrac{b^4 x^2}{a^4 y^3}}{\left(1 + \dfrac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{3/2}} = \frac{a^4 b^2 y^2 + a^2 b^4 x^2}{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{3/2}}$$

であり、長軸側の周では $y = 0$ とおいて、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{b^4 a^4}{\left(b^4 a^2\right)^{3/2}} = \frac{a}{b^2}$$

となる。よって、

$$\sigma_{\max} = \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)\sigma_a、\quad k = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

である。鋭い亀裂（クラック）は、この楕円孔の短軸 b を長軸 a に比べて十分に小さくすることで近似でき、そのときには、$a >> \rho$ なので、

$$\sigma_{\max} = 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\sigma_a$$

となる。

非常に鋭いクラックのとき、クラック先端の曲率半径は原子間距離 r_o 程度となるので、

$$\sigma_{\max} = 2\sqrt{\frac{a}{r_o}}\sigma_a$$

とできる。材料の破壊はこれが材料の理想強度σ_{fo}を越えるときに生じる。従って、

$$\sigma_{\max} = 2\sqrt{\frac{a}{r_o}}\sigma_a \geq \sigma_{fo}$$

より、

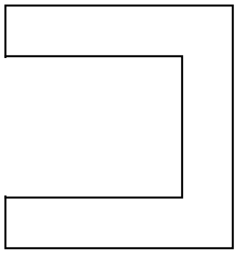
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{fo}\sqrt{r_o}}{2\sqrt{a}}$$

となって、き裂長さの平方根に逆比例して、材料の破壊強度は減少する。

材料力学問題

火曜日午後１時まで

１．断面の幅 5cm、高さ 2cm、長さ 2m のアルミ製の板が両端を固定されている。固定端に荷重が加わり座屈が起こるときの臨界座屈荷重、臨界座屈応力を求めなさい。



２．右図のように、一辺の長さ *h*、肉厚 *t* のコの字型断面を有する長さ L の長柱がある。

（１）両端回転支持のときの臨界座屈荷重、臨界座屈応力を求めなさい。

（２）$h = 5cm$、$t = 5mm$、$L = 3m$、$E = 206GPa$ の鋼製であった。臨界座屈荷重、臨界座屈応力、細長比を求めなさい。

（３）（２）の鋼製長柱に高さ 1m から *W* kgf の重さの剛体が落下した。座屈が生じる剛体の重さ *W* を求めなさい。