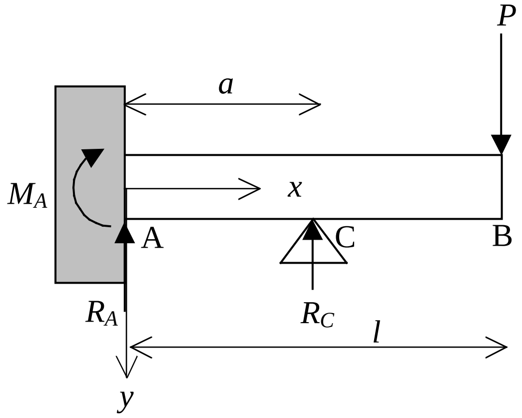
講義内容と演習問題の解答

第１週　【演習の解答】



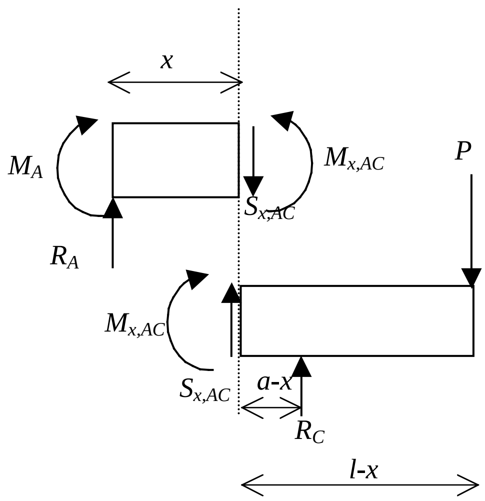
はりの自由体線図（略、講義ノート参照）において、力の釣り合いより反力について

$$R_A + R_C = P$$

モーメントの釣り合いより、固定モーメントは

$$M_A = R_C a - Pl$$

となり、未知数は R_A、R_C、M_A の３コあるので決まらない。よってこれらの値が未知のまま、たわみの問題を解き、はりに与えられたたわみの条件から定めることになる。



AC 間の任意の断面（$0 < x < a$）においては、右図に示す自由体線図より、はりの断面に働くせん断力 $S_{x,AC}$ は

$$S_{x,AC} = R_A = P - R_C$$

また、はりの断面に働く曲げモーメント $M_{x,AC}$ は、

$$M_{x,AC} = M_A + R_A x = -P(l - x) + R_C(a - x)$$

となる。上２式の真ん中の式は左側の自由体、一番右側の式は右側の自由体のつりあいから求められ、かつ、はり全体のつりあいの条件を満たしている。<u>未知変数が少ない方が計算の間違いも少ないので、一番右側の式を用いることにする。</u>

AC 間のたわみを y_{AC} とすると、たわみの定義より

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_{x,AC}}{EI} = \frac{P}{EI}(l - x) - \frac{R_C}{EI}(a - x)$$

となる。これより、

$$\frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{R_C}{EI}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$y_{AC} = \frac{P}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{R_C}{EI}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2$$

である。A 点（$x=0$）ではたわみ角、たわみはいずれも 0 であるので、

$$\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=0} = C_1 = 0、\quad \left.y_{AC}\right|_{x=0} = C_2 = 0$$

となる。また、C 点は回転支持によって支えられているのでたわみは 0 である。よって、

$$\left.y_{AC}\right|_{x=a} = \frac{P}{EI}\left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - \frac{R_C}{EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6}\right) = \frac{a^2}{EI}\left\{P\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) - \frac{R_C a}{3}\right\} = 0$$

より、$R_C = \frac{P}{2a}(3l-a)$を得る。これより、

$$R_A = P - R_C = -\frac{3P}{2a}(l-a)、\quad M_A = R_C a - Pl = \frac{P}{2}(l-a)$$

である。また、AC 間のたわみ角を i_{AC} とおくと、

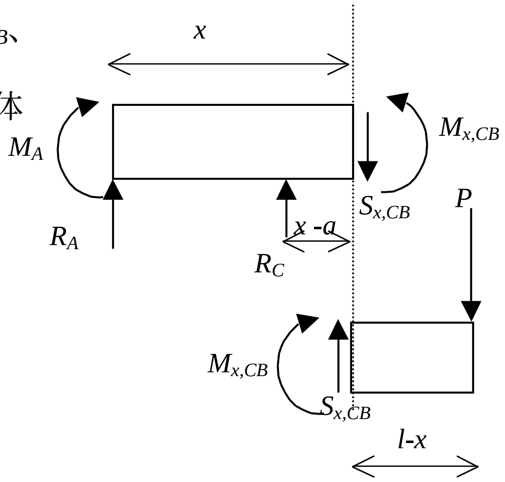
$$i_{AC} = \frac{dy_{AC}}{dx} = \frac{P}{EI}\left\{\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3l-a}{2a}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\right\} = \frac{P}{4EI}\frac{l-a}{a}(3x^2 - 2ax)$$

であり、たわみは以下の式で与えられる。

$$y_{AC} = \frac{P}{EI}\left\{\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{3l-a}{2a}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\} = \frac{P}{4EI}\frac{l-a}{a}(x^3 - ax^2)$$

　注意：上の２式のように、項をばらばらに展開しておくのではなく、可能ならばわかりやすい形にまとめる方がよい。たわみ角やたわみの変化が洞察しやすくなり、特に上の例では、$x=0$および$x=a$で$y_{AC}=0$であり、たわみの境界条件をみたしていることが容易にわかる。

ＣＢ間の任意の断面（$a < x < l$）に働くせん断力 $S_{x,CB}$、と曲げモーメント $M_{x,CB}$ については、右に示す自由体線図より、右側の自由体に着目して、



$$S_{x,CB} = P、\quad M_{x,CB} = -P(l-x)$$

となる。これより、CB 間のたわみを y_{CB} とすると、

$$\frac{d^2 y_{CB}}{dx^2} = -\frac{M_{x,CB}}{EI} = \frac{P}{EI}(l - x)$$

積分して、

$$\frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_3、\quad y_{CB} = \frac{P}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_3 x + C_4$$

を得る。ここで、はりの連続より C 点でのたわみ角は一致するので $\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=a}$ であるから、

$$\frac{P}{4EI}(la - a^2) = \frac{P}{EI}\left(la - \frac{a^2}{2}\right) + C_3、\quad \therefore C_3 = -\frac{P(3la - a^2)}{4EI}$$

となる。また、同じくはりの連続より C 点でたわみも一致し、かつ今の場合 C 点ではたわみは０であるから、$\left. y_{AC}\right|_{x=a} = \left. y_{CB}\right|_{x=a} = 0$ である。よって、

$$\left. y_{CB}\right|_{x=a} = \frac{P}{EI}\left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - \frac{P(3la^2 - a^3)}{4EI} + C_4 = -\frac{Pa^2}{4EI}\left(l - \frac{a}{3}\right) + C_4 = 0、\quad C_4 = \frac{Pa^2}{4EI}\left(l - \frac{a}{3}\right)$$

となる。以上より、CB 間のたわみ角を i_{CB} とすると、

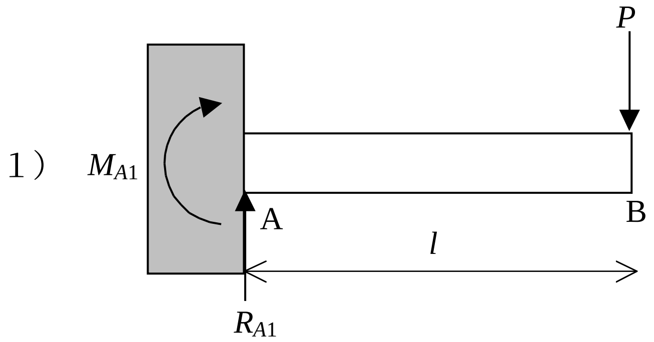
$$i_{CB} = \frac{dy_{CB}}{dx} = \frac{P}{EI}\left(-\frac{x^2}{2} + lx - \frac{3la - a^2}{4}\right) = -\frac{P}{4EI}(2x^2 - 4lx + 3la - a^2)$$

であり、たわみは

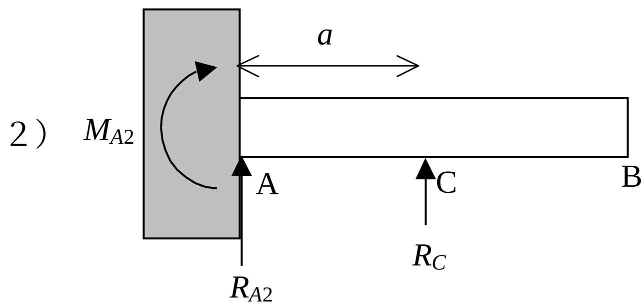
$$\begin{aligned} y_{CB} &= \frac{P}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{Pa(3l - a)}{4EI}x + \frac{Pa^2}{4EI}\left(l - \frac{a}{3}\right) \\ &= \frac{P}{EI}\left\{-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} - \frac{3la - a^2}{4}x + \frac{a^2}{4}\left(l - \frac{a}{3}\right)\right\} \\ &= -\frac{P}{12EI}\{2x^3 - 6lx^2 + (9la - 3a^2)x - 3la^2 + a^3\} \end{aligned}$$

となる。

【別解】 重ね合わせの法則



与えれた問題において、右図のようにはりに作用する力をわけて考える。すなわち、１）では自由端Ｂに荷重 P が作用し、２）では点Ｃに荷重 R_C が作用するものとする。このとき、反力と固定モーメントについて、



$$R_A = R_{A1} + R_{A2}$$

$$M_A = M_{A1} + M_{A2}$$

であって、重ね合わせの法則が成り立つ。同様に、はりの断面に作用するせん断力と曲げモーメントについても重ね合わせの法則が成り立つ。よって、

$S_x = S_{x1} + S_{x2}$	S_{x1}：１）におけるせん断力
	S_{x2}：２）におけるせん断力
$M_x = M_{x1} + M_{x2}$	M_{x1}：１）における曲げモーメント
	M_{x2}：２）における曲げモーメント

である。さらには、重ね合わせの法則はたわみ角とたわみについても成り立ち、１）と２）のたわみをそれぞれ y_1、y_2 とすると、

$$y = y_1 + y_2$$

より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\text{、あるいは、}\ i = i_1 + i_2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{M_{x1}}{EI} - \frac{M_{x2}}{EI}$$

である。よって、１）、２）のそれぞれの問題を解き、最後に足し合わせればよい。

１）の場合、

$$R_{x1}=P、\ M_{A1}=-Pl、\ S_{x1}=P、\ M_{x1}=R_{A1}x+M_{A1}=Px-Pl$$

より、A 点でたわみ角、たわみが０であることから

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=-\frac{M_{x1}}{EI}=-\frac{P}{EI}(x-l)、\ \frac{dy_1}{dx}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-lx\right)、\ y_1=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}\right)$$

であることはすぐ導かれる。

次に２）の場合を考えると、A 点での反力と固定モーメントは、

$$R_{x2}=-R_C、\ M_{A2}=R_C a$$

となる。AC 間のせん断力を $S_{x2,AC}$、曲げモーメントを $M_{x2,AC}$ とおくと、

$$S_{x2,AC}=R_A=-R_C、\ M_{x2,AC}=R_A x+M_{A2}=-R_C x+R_C a$$

を得る。よって、AC 間のたわみを $y_{2,AC}$ とおくと、A 点でたわみ角、たわみが０だから

$$\frac{d^2y_{2,AC}}{dx^2}=-\frac{M_{x2,AC}}{EI}=\frac{R_C}{EI}(x-a)、\ \frac{dy_{2,AC}}{dx}=\frac{R_C}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)、\ y_{2,AC}=\frac{R_C}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)$$

となる。また CB 間でのせん断力を $S_{x2,CB}$、曲げモーメントを $M_{x2,CB}$ とおくと

$$S_{x2,CB}=0、\ M_{x2,CB}=0$$

であり、CB 間のたわみを $y_{2,CB}$ とおくと、

$$\frac{d^2y_{2,CB}}{dx^2}=0、\ \frac{dy_{2,CB}}{dx}=C_5、\ y_{2,CB}=C_5x+C_6$$

となる。はりの連続より、C 点で

$$\left.\frac{dy_{2,AC}}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dy_{2,CB}}{dx}\right|_{x=a}\text{だから、}\ C_5=-\frac{R_C a^2}{2EI}$$

$$\left.y_{2,AC}\right|_{x=a}=\left.y_{2,CB}\right|_{x=a}\text{だから、}\ \frac{R_C}{EI}\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{2}\right)=-\frac{R_C a^3}{2EI}+C_6、\ \therefore C_6=\frac{R_C a^3}{6EI}$$

である。

ここで、未知数 R_C を決定しよう。１）と２）のたわみを重ね合わせて得られる C 点でのたわみは、

$$y\Big|_{x=a} = y_1\Big|_{x=a} + y_{2,AC}\Big|_{x=a} = 0$$

<u>でなければならない</u>。よって、上に得られた式より、

$$y_1\Big|_{x=a} + y_{2,AC}\Big|_{x=a} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2}\right) + \frac{R_C}{EI}\left(\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{2}\right) = 0 \quad \text{だから、} \quad R_C = \frac{P}{2a}(3l - a)$$

を得る。また、これより、

$$R_A = R_{A1} + R_{A2} = P - R_C = -\frac{3P}{2a}(l - a)$$

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} = -Pl + R_C a = \frac{P}{2}(l - a)$$

となる。

次に、重ね合わせた後の AC 間のたわみ角 i_{AC} とたわみ y_{AC} はそれぞれ求められた R_C を代入して、

$$i_{AC} \quad \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_{2,AC}}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + \frac{R_C}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) = \frac{P}{4EI}\frac{l-a}{a}(3x^2 - 2ax)$$

$$y_{AC} = y_1 + y_{2,AC} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) + \frac{R_C}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) = \frac{P}{4EI}\frac{l-a}{a}(x^3 - ax^2)$$

となる。また、重ね合わせた後の CB 間のたわみ角 i_{CB} とたわみ y_{CB} は、先に求めた C_5、C_6 の式ならびに R_C の式を代入して

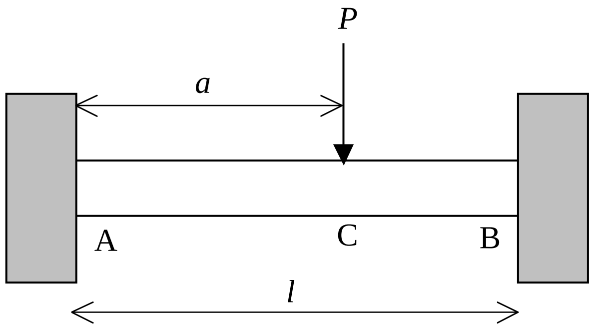
$$i_{CB} \quad \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_{2,CB}}{dx} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) - \frac{R_C a^2}{2EI} = -\frac{P}{4EI}(2x^2 - 4lx + 3la - a^2)$$

$$y_{CB} = y_1 + y_{2,CB} = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) - \frac{R_C a^2}{2EI}x + \frac{R_C a^3}{6EI}$$

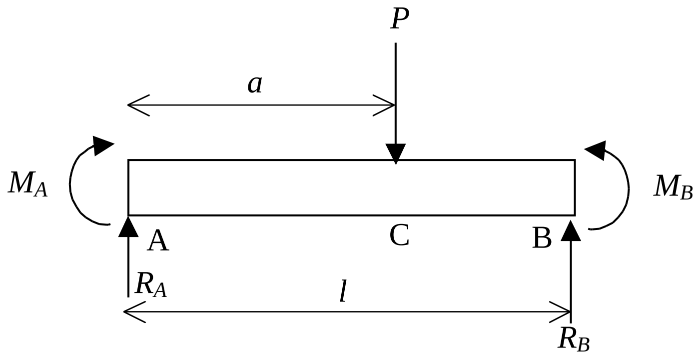
$$= -\frac{P}{12EI}\{2x^3 - 6lx^2 + (9la - 3a^2)x - 3la^2 + a^3\}$$

となる。

第２週講義内容　【両端固定はり】



　右の最上段の図のように両端が固定されいる長さ l のはりに、左端から a の位置 C 点に集中荷重 P が作用している場合を考える。



　このとき、固定端 A 点には反力 R_A と固定モーメント M_A、固定端 B 点には反力 R_B と固定モーメント M_B が生じる。右の２段目に示すはりの自由体線図より、力の釣り合いから

$$\boxed{R_A + R_B = P}$$

A 点周りのモーメントの釣り合いから

$$\boxed{M_A = -Pa + R_B l + M_B}$$

であり、決定方程式が２コであるのに対し未知数が４コであるため、不静定である。次にたわみについて考えてみると、AC 間のたわみを y_{AC}、BC 間のたわみを y_{BC} とするとき、それぞれ２コの未定の積分定数をもつので、R_A、R_B、M_A、M_B と合わせて８コの未知数となる。ここでたわみの境界条件を考えると、

固定端 A 点：	$\left.\dfrac{dy_{AC}}{dx}\right\|_{x=0} = 0$、　$\left. y_{AC}\right\|_{x=0} = 0$
C 点でのはりの連続：	$\left.\dfrac{dy_{AC}}{dx}\right\|_{x=a} = \left.\dfrac{dy_{CB}}{dx}\right\|_{x=a}$、　$\left. y_{AC}\right\|_{x=a} = \left. y_{CB}\right\|_{x=a}$
固定端 B 点：	$\left.\dfrac{dy_{CB}}{dx}\right\|_{x=l} = 0$、　$\left. y_{CB}\right\|_{x=l} = 0$

の６コあり、先のはりにおける力とモーメントの釣り合い式と合わせて計８コの決定方程式ができるため、たわみの式を解くことによってすべての未知数が決定される。

まず AC 間（$0 < x < a$）について考えると、はりの断面に働くせん断力と曲げモーメントはそれぞれ、

$$S_{x,AC} = R_A、\ M_{x,AC} = R_A x + M_A$$

である。よって、AC 間のたわみ y_{AC} は

$$EI\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -M_{x,AC} = -R_A x - M_A$$

$$EI\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{R_A x^2}{2} - M_A x + C_1、\ EIy_{AC} = -\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

であり、固定端 A 点での境界条件、$\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=0} = y_{AC}\big|_{x=0} = 0$、より、$C_1 = C_2 = 0$ となる。

次に BC 間（$a < x < l$）について考えると、はりの断面に働くせん断力と曲げモーメントはそれぞれ、

$$S_{x,CB} = R_A - P、\ M_{x,CB} = R_A x + M_A - P(x-a)$$

である。よって、CB 間のたわみ y_{CB} については

$$EI\frac{d^2 y_{CB}}{dx^2} = -M_{x,AC} = -R_A x - M_A + P(x-a)$$

$$EI\frac{dy_{CB}}{dx} = -\frac{R_A x^2}{2} - M_A x + P\left(\frac{x^2}{2} - ax\right) + C_3$$

$$EIy_{CB} = -\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + P\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) + C_3 x + C_4$$

となる。

ここで、C 点でのはりの連続より、まず、$\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=a}$ であるから、

$$-\frac{R_A a^2}{2} - M_A a = -\frac{R_A a^2}{2} - M_A a + P\left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) + C_3 \text{ より、} C_3 = \frac{Pa^2}{2}$$

であり、$y_{AC}\big|_{x=a} = y_{CB}\big|_{x=a}$ であるから、

$$-\frac{R_A a^3}{6} - \frac{M_A a^2}{2} = -\frac{R_A a^3}{6} - \frac{M_A a^2}{2} + P\left(\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{2}\right) + \frac{Pa^3}{2} + C_4 \text{ より、} C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

を得る。よって

$$EI\frac{dy_{CB}}{dx} = -\frac{R_A x^2}{2} - M_A x + P\left(\frac{x^2}{2} - ax\right) + \frac{Pa^2}{2} = -\frac{R_A x^2}{2} - M_A x + \frac{P}{2}(x-a)^2$$

$$EIy_{CB} = -\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + P\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) + \frac{Pa^2}{2}x - \frac{Pa^3}{6} = -\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + \frac{P}{6}(x-a)^3$$

となる。

固定端 B 点での境界条件を適用すると、

$$EI\frac{dy_{CB}}{dx}\bigg|_{x=l} = -\frac{R_A l^2}{2} - M_A l + \frac{P}{2}(l-a)^2 = 0$$

$$EIy_{CB} = -\frac{R_A l^3}{6} - \frac{M_A l^2}{2} + \frac{P}{6}(l-a)^3 = 0$$

である。第１式より、

$$M_A l = -\frac{R_A l^2}{2} + \frac{P}{2}(l-a)^2$$

なので、第２式に代入すると、

$$-\frac{R_A l^3}{6} + \frac{R_A l^3}{4} - \frac{P}{4}l(l-a)^2 + \frac{P}{6}(l-a)^3 = \frac{R_A l^3}{12} - \frac{P}{12}(l+2a)(l-a)^2 = 0$$

より、

$$R_A = P\frac{(l+2a)(l-a)^2}{l^3}$$

また、

$$M_A = -\frac{R_A l}{2} + \frac{P}{2}\frac{(l-a)^2}{l} = -P\frac{(l+2a)(l-a)^2}{2l^2} + \frac{P}{2}\frac{(l-a)^2}{l}$$
$$= -\frac{P}{2l^2}(l-a)^2(l+2a-l) = -\frac{P}{l^2}a(l-a)^2$$

を得る。また、B 点での反力と固定モーメントは。

$$R_B = P - R_A = \frac{P}{l^3}\{l^3 - (l+2a)(l-a)^2\} = \frac{P}{l^3}\{l^3 - (l+2a)(l^2 - 2al + a^2)\}$$
$$= \frac{P}{l^3}(l^3 - l^3 + 2al^2 - a^2 l - 2al^2 + 4a^2 l - 2a^3)$$
$$= \frac{P}{l^3}(3a^2 l - 2a^3)$$
$$= \frac{P}{l^3}a^2(3l - 2a)$$

であり、

$$
\begin{aligned}
M_B = R_A l + M_A - P(l-a) &= \frac{P}{l^2}(l+2a)(l-a)^2 - \frac{P}{l^2}a(l-a)^2 - P(l-a) \\
&= \frac{P}{l^2}(l-a)\{(l+2a)(l-a) - a(l-a) - l^2\} \\
&= \frac{P}{l^2}(l-a)\{(l+2a)(l-a) - a(l-a) - l^2\} \\
&= \frac{P}{l^2}(l-a)(l^2 + al - 2a^2 - al + a^2 - l^2) \\
&= -\frac{P}{l^2}(l-a)a^2
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$b = l - a$とおくと、

$$R_A = P\frac{(3a+b)b^2}{l^3}、\ R_B = \frac{P}{l^3}a^2(a+3b)$$

また、

$$M_A = -\frac{P}{l^2}ab^2、\ M_B = -\frac{P}{l^2}a^2 b$$

となる。たわみ角及びたわみは上で求めた R_A、R_B、M_A、M_B を代入して得られる。

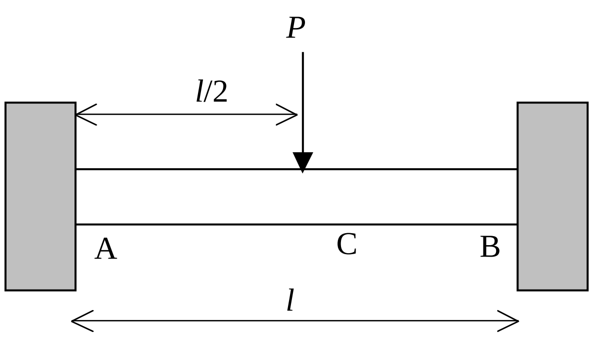
【左右対称のとき】

上の例で、$a = b = \dfrac{l}{2}$のとき、すなわち荷重 P が

両端固定はりの中央に作用する場合を考えると、

$$R_A = R_B = P\frac{4a^3}{l^3} = \frac{P}{2}$$

$$M_A = M_B = -\frac{P}{l^2}a^3 = -\frac{Pl}{8}$$



となることが容易にわかる。

ここでは、<u>はりに作用する力、モーメントならびにたわみ角やたわみに関する条件が、はりの中心に関して左右対称な場合</u>を考える。左右対称であるから、力の釣り合いより

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

である。一方、A 点周りのモーメントを考えると、

$$M_A = R_B l - \frac{Pl}{2} + M_B = M_B$$

となって、M_A と M_B は等しい（左右対称だから当然）ことはわかるが、値は求められない。従って、M_A が求めれれば、M_B は自動的に決まるから、未知数は１ケである。

　はりのたわみを考えてみると、左右対称では、たわみは荷重が作用している中央の　C 点で最大となり、たわみ角は０となる。よって、AC 間のたわみに関する以下の式

$$EI\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -R_A x - M_A$$

$$EI\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{R_A x^2}{2} - M_A x + C_1$$

$$EIy_{AC} = -\frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

について、まず、A 点での境界条件より $C_1 = C_2$ であり、C 点でたわみ角が０であることから、

$$EI\left.\frac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{R_A l^2}{8} - \frac{M_A l}{2} = 0、\therefore M_A = -\frac{R_A l}{4}$$

となる。よって、

$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}$$

を得る。後は、たわみ角とたわみの式に入れて解けばよく、AC 間のたわみ角は

$$i_{AC} \quad \frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^2}{2} + M_A x\right) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{lx}{8}\right) = \frac{P}{8EI}x\left(l - 2x\right)$$

となり、

$$y_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{R_A x^3}{6} + \frac{M_A x^2}{2}\right) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{12} - \frac{lx^2}{16}\right) = -\frac{P}{48EI}x^2(4x - 3l)$$

より、C 点での最大たわみは、

$$\left.y_{AC}\right|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{P}{48EI}\frac{l^2}{4}(2l - 3l) = \frac{Pl^3}{192EI}$$

となる。