材料力学　平成１９年度課題　第２週（中村編）
締切　今週　金曜日

＃自由体線図は必ず書くこと！
＃単位を必ず書くこと！（単位がなければ意味がないので減点する）

【問題１】図１に示すように、直径 d = 5 cm、長さ 2 m の鋼製の片持ちはりが中央Ｃ点でばねに支えられ、自由端Ｂ点で集中荷重 P = 500 N が作用している。以下の各問いに答えなさい。ただし、ばね係数を k = 500 N/m とし、鋼のヤング率を E = 200 GPa とする。

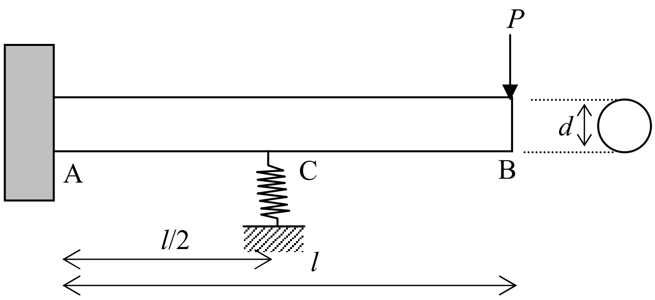


図１

（１）固定端Ａ点の反力を R_A、反モーメントを M_A、ばねに作用する力を R_C とするとき、これらを用いて力の釣り合いならびにモーメントの釣り合いを表しなさい。
（２）AC 間の曲げモーメントを $M_{x,\ AC}$、CB 間の曲げモーメントを $M_{x,\ CB}$ とするとき、それぞれ、R_A、M_A、R_C、P を用いて表しなさい。
（３）C 点でのたわみを y_C とするときばねの法則、$R_C = ky_C$、が成り立つことを利用して、R_A、R_C（それぞれ単位は N）、M_A 単位 N・m）ならびに y_C （単位 mm）を求めなさい。
（４）自由端Ｂ点のたわみ角（単位ラジアン、rad）とたわみ（単位 mm）を求めなさい。

【問題２】両端が壁に固定された、断面の高さが h、幅が b、長さが l のはりがある。このはりのヤング率を E とする。今、地震によって、図２のように右側の壁がλだけ下方に変位した。このとき、以下の各問いに答えなさい。

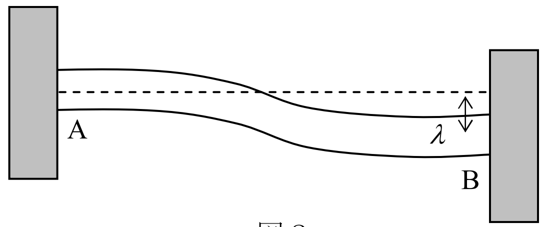


図２

（１）固定端 A の反力を R_A、反モーメントを M_A、固定端Ｂ点での反力を R_B、反モーメントを M_B とする。これらを用いて力とモーメントの釣り合いを表しなさい。
（２）R_A、M_A、R_B、M_B を求め、SFD、BMD を描きなさい。
（３）はりはσ_Bの引張応力で破壊する。この破壊応力に対する安全率を S ＝ 12 として許容応力σ_aを定めることにする。はりの断面に作用する最大曲げ応力が許容応力を越えないための条件を求めなさい。

【問題３】y は独立変数 x の従属変数であり、微分可能な連続関数である。以下の各問いに答えなさい。

（１）$\dfrac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ において、一般解を求めなさい。

（２）$k > 0$ のとき、以下の境界条件を満たす解を求めなさい。

１）$y|_{x=0} = 0$、$y|_{x=l} = 0$

２）$y|_{x=0} = 0$、$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$、$y|_{x=l} = \delta$

材料力学　H１９年度第２週　解答例

【問題１】

（１）力の釣り合い、$R_A + R_C = P$、モーメントのつりあい　$M_A = -Pl + R_C l/2$

（２）
$$M_{x,AC} = R_A x + M_A = Px - R_C x - Pl + \frac{R_C l}{2}$$

$$M_{x,CB} = R_A x + M_A - R_C(x - l/2) = Px - R_C x - Pl + \frac{R_C l}{2} + R_C x - \frac{R_C l}{2}$$
$$= Px - Pl$$

（３）ＡＣ間でのたわみを y_{AC} とすると、Ａ点が固定点であることから

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_{x,AC}}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(Px - R_C x - Pl + \frac{R_C l}{2}\right)$$

$$\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{2} - \frac{R_C x^2}{2} - Plx + \frac{R_C lx}{2}\right)$$

$$y_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{6} - \frac{R_C x^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} + \frac{R_C lx^2}{4}\right)$$

となる。これより、Ｃ点で

$$y_C = y_{AC}\Big|_{x=l/2} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Pl^3}{48} - \frac{R_C l^3}{48} - \frac{Pl^3}{8} + \frac{R_C l^3}{16}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{5Pl^3}{48} - \frac{R_C l^3}{24}\right) = \frac{R_C}{k}$$

となる。従って、Ｃ点の反力として、

$$R_C = \frac{5kPl^3}{2(24EI + kl^3)}$$

を得る。これより、$R_A = P - R_C$、$M_A = -Pl + R_C l/2$ を計算すればよい。まず、はりの剛性率は

$$EI = E\frac{\pi d^4}{64} = 61.3\times 10^3\ \mathrm{N\cdot m^2}$$

より、

$$R_C = \frac{5\times 500\ \mathrm{N/m}\times 500\ \mathrm{N}\times(2\ \mathrm{m})^3}{2\times\boxed{(24\times} 61.3\times 10^3\ \mathrm{N\cdot m^2} + 500\ \mathrm{N/m}\times(2\ \mathrm{m})^3)} = \boxed{3.39\ \mathrm{N}}$$

$$R_A = 500\ \mathrm{N} - 3.39\ \mathrm{N} = \boxed{496.41\ \mathrm{N}}$$

$$M_A = -500\ \mathrm{N}\times 2\ \mathrm{m} + \frac{3.39\ \mathrm{N}\times 2\ \mathrm{m}}{2} = \boxed{-996.61\ \mathrm{N\cdot m}}$$

（４）まず、はりの連続の境界条件のため、Ｃ点でのたわみ角とたわみを求めると、それぞれ、

$$i_C \cong \frac{dy_{AC}}{dx}\bigg|_{x=l/2} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Pl^2}{8} - \frac{R_C l^2}{8} - \frac{Pl^2}{2} + \frac{R_C l^2}{4}\right) = \frac{l^2}{8EI}(3P - R_C)、\ y_C = \frac{R_C}{k}$$

となる。次に、ＣＢ間のたわみを y_{CB} とすると、

$$\frac{d^2y_{CB}}{dx^2}=-\frac{M_{x,CB}}{EI}=-\frac{P}{EI}(x-l)\text{、}\quad\frac{dy_{CB}}{dx}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-lx\right)+C_3$$

$$y_{CB}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}\right)+C_3x+C_4$$

となる。Ｃ点でのはりのたわみ角を代入して、

$$\left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=l/2}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{l^2}{8}-\frac{l^2}{2}\right)+C_3=\frac{3P}{8EI}+C_3=\frac{l^2}{8EI}(3P-R_C)\text{、}\ \therefore C_3=-\frac{R_Cl^2}{8EI}$$

また、Ｃ点でのたわみを代入して、

$$\left.y_{CB}\right|_{x=l/2}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{l^3}{48}-\frac{l^3}{8}\right)-\frac{R_Cl^2}{8EI}+C_4=-\frac{1}{EI}\left(\frac{Pl^3}{48}-\frac{R_Cl^3}{48}-\frac{Pl^3}{8}+\frac{R_Cl^3}{16}\right)$$

より、$C_4=\dfrac{R_Cl^3}{12EI}$ となる。これより、

$$\frac{dy_{CB}}{dx}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-lx\right)-\frac{R_Cl^2}{8EI}$$

$$y_{CB}=-\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}\right)-\frac{R_Cl^2x}{8EI}+\frac{R_Cl^3}{12EI}$$

を得る。従って、Ｂ点におけるたわみ角とたわみは、

$$i_B\approx\left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=l}=\frac{Pl^2}{2EI}-\frac{R_Cl^2}{8EI}=\frac{l^2}{8EI}(4P-R_C)$$
$$=\frac{(2\,\mathrm{m})^2}{8\times61.3\times10^3\ \mathrm{N\cdot m}}\times(4\times500\,\mathrm{N}\boxed{-3.39\,\mathrm{N})}$$
$$=\boxed{0.0326\,\mathrm{rad}}$$

また、たわみについては、

$$y_B=\left.y_{CB}\right|_{x=l}=\frac{Pl^3}{3EI}-\frac{R_Cl^3}{8EI}+\frac{R_Cl^3}{12EI}=\frac{Pl^3}{3EI}-\frac{R_Cl^3}{24EI}=\frac{l^3}{24EI}(8P-3R_C)$$
$$=\frac{(2\,\mathrm{m})^3}{24\times(61.3\times10^3\ \mathrm{N\cdot m^2})}(8\times500\,\mathrm{N}-3\times3.39\,\mathrm{N})=\boxed{0.0217\,\mathrm{m}}=\boxed{21.7\,\mathrm{mm}}$$

となる。

【問題２】

（１）力のつりあいより $R_A+R_B=0$、Ａ点回りのモーメントのつりあいより、$M_A=M_B+R_Bl$

（２）はりの中央Ｃ点においてはりを二分する。ＡＣ間で、Ａ点が固定されていることを考慮して、

$$\frac{d^2y_{AC}}{dx^2}=-\frac{1}{EI}(R_Ax+M_A)\text{、}\quad\frac{dy_{AC}}{dx}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{R_Ax^2}{2}+M_Ax\right)\text{、}\quad y_{AC}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{R_Ax^3}{6}+\frac{M_Ax^2}{2}\right)$$

となる。ただし、$I=\dfrac{bh^3}{12}$ である。Ｃ点でのたわみは$\lambda/2$ であるので、

$\dfrac{\lambda}{2}=-\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{R_A l^3}{48}+\dfrac{M_A l^2}{8}\right)$ より、$\therefore R_A l+M_A=-\dfrac{24\lambda EI}{l^2}$

となる。次にＣＢ間について考えると、

$$\frac{d^2 y_{CB}}{dx^2}=-\frac{1}{EI}\{R_B(l-x)+M_B\}$$

$$\frac{dy_{CB}}{dx}=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{R_B(l-x)^2}{2}-M_B(l-x)\right)+C_3、$$

$$y_{CB}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{R_B(l-x)^3}{6}+\frac{M_B(l-x)^2}{2}\right)-C_3(l-x)+C_4$$

となる。固定端Ｂ点でたわみ角が０なので、

$$\left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=l}=C_3=0$$

である。また固定端Ｂ点でのたわみはλなので

$$\left.y_{CB}\right|_{x=l}=C_4=\lambda$$

となる。これより、ＣＢ間で

$$\frac{dy_{CB}}{dx}=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{R_B(l-x)^2}{2}-M_B(l-x)\right)、\ y_{CB}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{R_B(l-x)^3}{6}+\frac{M_B(l-x)^2}{2}\right)+\lambda$$

を得る。これに対し、Ｃ点ではりの連続条件より、まず

$\left.\dfrac{dy_{AC}}{dx}\right|_{x=l/2}=\left.\dfrac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=l/2}$ から、$-\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{R_A l^2}{8}+\dfrac{M_A l}{2}\right)=-\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{R_B l^2}{8}-\dfrac{M_B l}{2}\right)$

なので、$R_A=-R_B$を代入して、

$$M_A=-M_B$$

を得る。同様にして、Ｃ点でのたわみの条件から

$\left.y_{CB}\right|_{x=l/2}=-\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{R_B l^3}{48}+\dfrac{M_B l^2}{8}\right)+\lambda=\dfrac{\lambda}{2}$、$\therefore R_B l+6M_B=\dfrac{24\lambda EI}{l^2}$

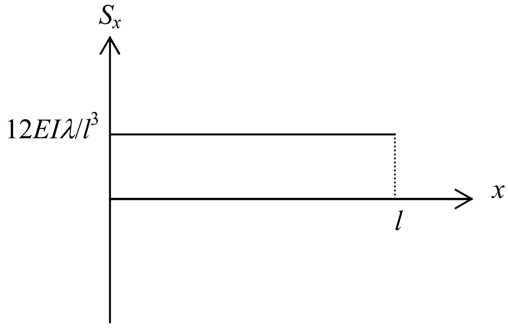
となる。はりのモーメントのつりあいより、

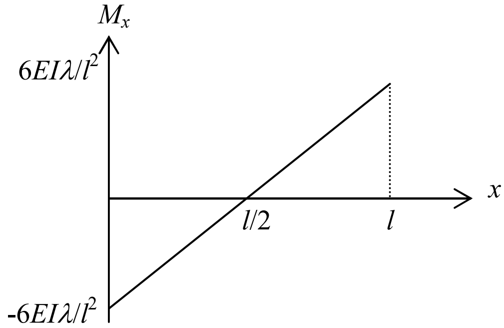
$M_A=M_B+R_B l=\dfrac{24\lambda EI}{l^2}-5M_B=\dfrac{24\lambda EI}{l^2}+5M_A$、$\therefore M_A=-M_B=-\dfrac{6\lambda EI}{l^2}$

であり、$R_A=-\dfrac{24\lambda EI}{l^3}-\dfrac{6M_A}{l}=-\dfrac{24\lambda EI}{l^3}+\dfrac{36\lambda EI}{l^3}=\dfrac{12\lambda EI}{l^3}$ となる。また、$R_B=-\dfrac{12\lambda EI}{l^3}$ である。

以上より、AC 間で$S_x=R_A=\dfrac{12\lambda EI}{l^3}$、$M_x=R_A x+M_A=\dfrac{12\lambda EI}{l^3}x-\dfrac{6\lambda EI}{l^2}$ となり、

ＣＢ間でも、$S_x=R_A=\dfrac{12\lambda EI}{l^3}$、$M_x=R_A x+M_A=\dfrac{12\lambda EI}{l^3}x-\dfrac{6\lambda EI}{l^2}$ である。従って、SFD、ならびに MBD は、下図のようになる。





（３）　$I=\dfrac{bh^3}{12}$ であるが、（２）の結果より、曲げモーメントの最大値は $M_{\max}=\dfrac{6EI\lambda}{l^2}$ である。よって、最大の曲げ応力は、$\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}}{I}\dfrac{h}{2}=\dfrac{6E\lambda}{l^2}\times\dfrac{h}{2}=\dfrac{3Eh\lambda}{l^2}$ となる。これが、許容応力以下となるためには、$\dfrac{3Eh\lambda}{l^2}\leq\dfrac{\sigma_B}{12}$ より、$\dfrac{36h\lambda}{l^2}\leq\dfrac{\sigma_B}{E}$ となるような材料設計を行えばよい。

【問題３】

（１）　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+ky=0$ において、$k=0$ のとき、一般解は $y=C_1+C_2x$ で与えられる。

$k\neq 0$ のとき、基本解のひとつを $\phi_1=e^{ax}$ とおく。これを代入すると、$\dfrac{d^2\phi_1}{dx^2}+k\phi_1=(a^2+k)e^{ax}=0$ をえる。これより、$\phi_1=e^{ax}\neq 0$ なので、$a^2+k=0$ となる。

ここで、問題には k が実数とも複素数とも指定していないので、$k=k_1+ik_2$ とおく。$a=\pm i\sqrt{k}=\pm i\sqrt{k_1+ik_2}$、ただし、$k_1$、$k_2$ は実数である。一方、$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}e^{i\theta}$、$\tan\theta=k_2/k_1$ である。よって、$a=\pm i\sqrt{k}=\pm i\sqrt{\sqrt{k_1^2+k_2^2}e^{i\theta/2}}=\pm i(k_1^2+k_2^2)^{1/4}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ であって、基本解は、

$$\phi_1=\exp\left[(k_1^2+k_2^2)^{1/4}\left(i\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)x\right]、\ \phi_2=\exp\left[(k_1^2+k_2^2)^{1/4}\left(-i\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)x\right]$$

で与えられる。これより、一般解は

$$
\begin{aligned}
y &= C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3 + C_4 x \\
&= C_1 \exp\left[(k_1{}^2 + k_2{}^2)^{1/4}\left(i\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)x\right] + C_2 \exp\left[(k_1{}^2 + k_2{}^2)^{1/4}\left(-i\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)x\right] \\
&\quad + C_3 + C_4 x
\end{aligned}
$$

となる。

（2）k は正の実数であるから、（1）で求めた一般解において $k_1 = k > 0$、$k_2 = 0$、$\theta = 0$ として、$k > 0$ のときの一般解は、$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x}$ となる。

1）の境界条件では、$y|_{x=0} = C_1 + C_2 = 0$ であり、$y|_{x=l} = C_1(e^{i\sqrt{k}l} - e^{-i\sqrt{k}l}) = 0$ となる。$C_1 \neq 0$ であるためには、$e^{i\sqrt{k}l} - e^{-i\sqrt{k}l} = 2i\sin\sqrt{k}l = 0$ より $\sqrt{k}l = n\pi$、ただし n は整数である。よって、このようにして求められた固有値 n に対して、固有関数 $y_n = 2iC_{1n}\sin\dfrac{n\pi x}{l} = C_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ が解となる。一般解は、これらの固有解の足し合わせで作られる。すなわち、

$$
y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}
$$

である。

2）の境界条件、$y|_{x=0} = 0$、$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$、$y|_{x=l} = \delta$ では、まず、$y|_{x=0} = C_1 + C_2 = 0$ を得る。次に、

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = (iC_1\sqrt{k}e^{i\sqrt{k}x} - iC_2\sqrt{k}e^{-i\sqrt{k}x})_{x=0} = i\sqrt{k}(C_1 - C_2) = 0$、すなわち、$C_1 - C_2 = 0$ となる。これらの境界条件を同時に満たす C_1、C_2 は 0 以外にない。しかし、$C_1 = C_2 = 0$ では $y|_{x=l} = \delta$ を満足しない。このことは、与えられた一般解以外の特解が存在することを意味する。そこで、試しに特解として δ を選ぶことにする。これから、$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x} + \delta$ であるから、境界条件はそれぞれ

$$
y|_{x=0} = C_1 + C_2 + \delta = 0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = i\sqrt{k}(C_1 - C_2) = 0
$$

となり、$C_1 = C_2 = -\delta/2$ となる。一方、$y|_{x=l} = \delta\cos\sqrt{k}l = \delta$ より、$\cos\sqrt{k}l = 1$ が満足されなければならない。よって、$\sqrt{k}l = 2n\pi$、n は整数となる。このようにして得られた固有値 n に対する固有関数は

$$
y_n = \delta\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{l}x\right)
$$

で与えられる。この場合、固有関数の係数を決める境界条件が付加されているので、1）の場合と異なり、それぞれの固有関数が解となる。

材料力学　平成１９年度課題　第３週（中村編）
締切　今週　金曜日

【問題１】図１に示す断面（図中の数字の単位は cm）を有する長さ $l = 5$ m のアルミ製棒が地面に固定されている。このとき以下の各問いに答えよ。ただしアルミのヤング率を $E = 70\,\mathrm{GPa}$ とする。
（１）図心を通る X 軸まわりの断面２次モーメント I_X、Y 軸周りの断面２次モーメント I_Y を求めよ。
（２）図２に示すように、アルミ棒の自由端に荷重を負荷するとき、X 軸周りにたわむ座屈荷重 P_{CX}、ならびに Y 軸まわりにたわむ座屈荷重 P_{CY} を求め、どちらの軸の回りに座屈が起こりやすいか調べよ。

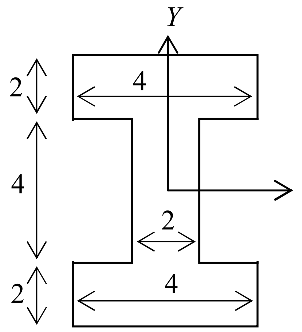


図１

【問題２】図３に示すように、問題１の棒の下端が固定され、上端は上下の変位のみが許されているときの臨界座屈荷重 P_{cr} を求めよ。ただし、座屈は起こりやすい軸の回りに生じるものとする。

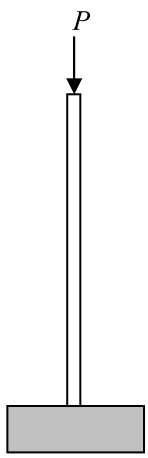


図２

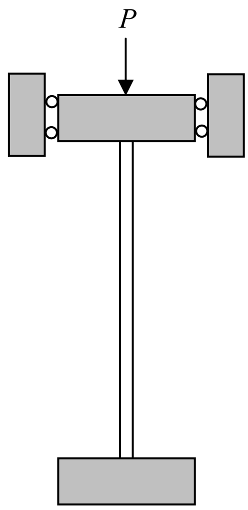


図３

【問題３】以下の各問いに答えなさい。
（１）図４において、半径方向に r から $r + dr$、周方向に θ から $\theta + d\theta$ の間にある微小要素の面積 dA_1 を求めなさい。
（２）半径 r から $r + dr$ にあるリング状の微小要素の面積 dA を求めなさい。
（３）外半径を R とするとき、（２）を用いて円の面積 A を求めなさい。

【問題４】以下の各問いに答えなさい。
（１）せん断応力、せん断ひずみについて説明しなさい。
（２）せん断応力の共役性について説明しなさい。

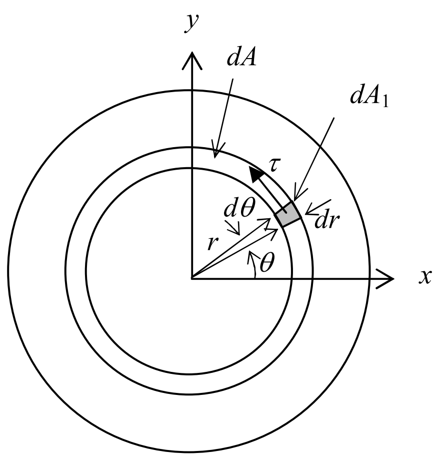


図４

材料力学　Ｈ１９年度第３週　解答例

問題２は全面訂正しています

（以前の両端座屈問題の解も間違いです。間違いを教えてくれた皆さんが正しく、私の持っている参考書がおかしい！）。

【問題 1】

（１）X 軸周りの断面二次モーメント

$$I_X = \frac{4\,\mathrm{cm}\times(8\,\mathrm{cm})^3}{12} - \frac{2\,\mathrm{cm}\times(4\,\mathrm{cm})^3}{12} = \frac{1920\,\mathrm{cm}^4}{12} = 160\,\mathrm{cm}^4 = 160\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

Y 軸周りの断面二次モーメント

$$I_Y = \frac{4\,\mathrm{cm}\times(2\,\mathrm{cm})^3}{12} + 2\times\frac{2\,\mathrm{cm}\times(4\,\mathrm{cm})^3}{12} = \frac{288\,\mathrm{cm}^4}{12} = 24\,\mathrm{cm}^4 = 24\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

（２）B 点のたわみをδとすると、A 点での反力は$R_A = P$、反モーメントは$M_A = P\delta$である。

よって、A 点からxの高さにおける曲げモーメントは$M_x = Py + M_A = Py + P\delta$となる。

これより、たわみの式は、$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{P}{EI}y - \dfrac{P}{EI}\delta$で与えられる。ここで、$y' = y - \delta$とおくと、$dy'/dx = dy/dx$、$d^2y'/dx^2 = d^2y/dx^2$なので、たわみの式は

$\dfrac{d^2y'}{dx^2} + \dfrac{P}{EI}y' = 0$と書き直すことができ、一般解は$y' = A\cos\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x + B\sin\sqrt{\dfrac{P}{EI}}x$となる。

また、y’に対する境界条件は、$y'|_{x=0} = -\delta$、$\left.\dfrac{dy'}{dx}\right|_{x=0} = 0$ならびに$y'|_{x=l} = 0$である。

まず、$y'|_{x=0} = -\delta$より、$A = -\delta$、次に$\left.\dfrac{dy'}{dx}\right|_{x=0} = 0$より、$B = 0$を得る。

最後に、$y'|_{x=l} = 0$より、$y'|_{x=l} = -\delta\cos\sqrt{\dfrac{P}{EI}}l = 0$となる。これを満たすのは

$\sqrt{\dfrac{P}{EI}}l = \dfrac{2n-1}{2}\pi$、$n = 1,2,\cdots$のときである。よって、たわみは、$y = \delta\left(1-\cos\dfrac{2n-1}{2l}x\right)$、

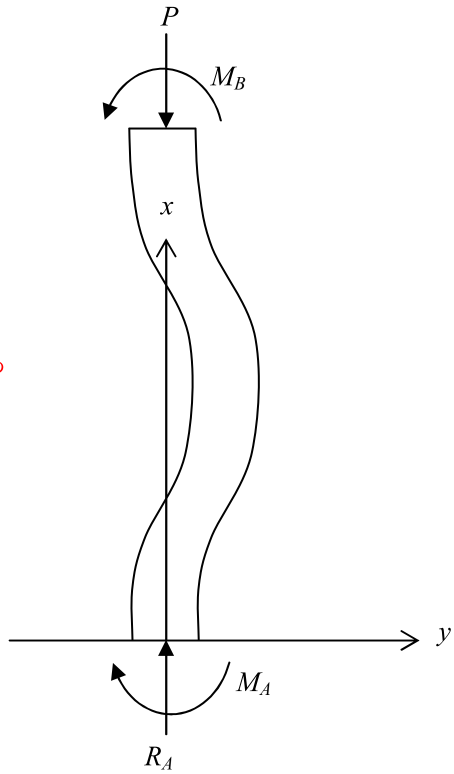
臨界荷重は$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$となる。

（１）の結果より、X 軸周りの座屈に対しては、$EI_X = 112000\,\mathrm{N\cdot m^2}$なので、座屈荷

重は、$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI_X}{4l^2}=\dfrac{\pi^2\times 112000\,\mathrm{N\cdot m^2}}{4\times(5\,\mathrm{m})^2}=11054\,\mathrm{N}=11.1\mathrm{kN}$ である。

（２）の結果より、Y 軸周りの座屈に対しては、$EI_Y=16800\,\mathrm{N\cdot m^2}$ なので、座屈荷重は、$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI_y}{4l^2}=\dfrac{\pi^2\times 16800\,\mathrm{N\cdot m^2}}{4\times(5\,\mathrm{m})^2}=1658\,\mathrm{N}=1.66\,\mathrm{kN}$ である。

【問題２】



（１）　$M_x=M_A+R_A y=M_A+Py$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{M_x}{EI}=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y+\frac{M_A}{EI}=0$$

$$y=A\sin kx+B\cos kx+C$$

とおくと、固定端 A 点でのたわみが０であることから

$$y\big|_{x=0}=B+C=0$$

固定端 A 点でのたわみ角が０であることから、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=Ak=0、\therefore A=0$$

よって、

$$y=C(1-\cos kx)$$

となる。たわみの式に代入すると、

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y+\frac{M_A}{EI}=Ck^2\cos kx-\frac{P}{EI}C\cos kx+\frac{P}{EI}C+\frac{M_A}{EI}=\frac{P}{EI}C+\frac{M_A}{EI}=0$$

より、$k=\sqrt{\dfrac{P}{EI}}$、$C=-\dfrac{M_A}{P}$ となり、$y=-\dfrac{M_A}{P}(1-\cos kx)$ である。これより、棒の中点で最大のたわみとなる座屈条件は、$\cos\dfrac{kl}{2}=-1$ であり、$\dfrac{kl}{2}=(2n-1)\pi$、$n=1,2,\cdots$ となる。これより、座屈荷重は $P=\dfrac{4\pi^2 EI}{l^2}$ となる。以上より、両端固定の場合の臨界座屈荷重は、一端固定の場合よりも 16 倍大きく、問題１（２）の結果より、Y 軸の周りに生じる座屈において、臨界荷重は $P_{cr}=1.66\,\mathrm{kN}\times 16=25.6\,\mathrm{kN}$ となる。

（座屈をもたらす他のモードの解については、一般解と特解の設定の議論について、応用数学Ｉの常微分方程式であまり習ってないみたいなので省略する）

【問題３】

（１） $dA_1 = rdrd\theta$

（２） $dA = \oint dA_1 = \int_0^{2\pi} rdrd\theta = 2\pi rdr$

（３） $A = \int_A dA = \int_0^R 2\pi rdr = \pi R^2$

【問題４】省略