材料力学問題　H19 年度第 4 週（中村編）

修正版（一版）

【問題 1】半径 R の中軸丸棒の伝動軸がある。この伝動軸のせん断に対する破壊強度は 300 MPa である。以下の各問いに答えよ。

（１）せん断破壊強度に対する安全率を 4 として、許容せん断応力 τ_a を求めよ。

（２）断面に作用する最大せん断応力を τ_{max} とするとき、トルク T を求めよ。

（３）回転数 84 rpm で 100 馬力の動力を伝えるとき、軸の断面に作用する最大せん断応力が許容応力以下となる軸の直径を求めよ。

【問題 2】下図に示すように両端を固定された長さ l の中空丸棒 AB がある。丸棒の外径を D、内径を d とする。A 点から a の位置において、トルク T を作用するとき、以下の各問いに答えよ。ただし棒の剛性率（横弾性係数）を G とする。

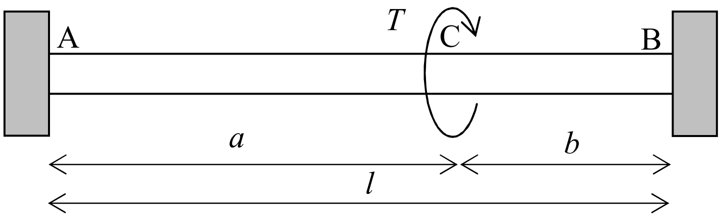
（１）断面極二次モーメント I_p を求めよ。

（２）C 点におけるねじり角を求めよ。

（３）AC 間のトルク T_1、CB 間のトルク T_2 を求めよ。

（４）棒の内径は $d = 8\,\mathrm{cm}$、また許容せん断応力は $\tau_a = 50\,\mathrm{MPa}$ である。$a = 3\,\mathrm{m}$、$b = 1\,\mathrm{m}$ のとき、C 点に作用するトルクは $T = 12\,\mathrm{kN\cdot m}$ であった。棒の断面に作用する最大せん断応力が許容せん断応力となるような棒の外径を求めよ。（4 次の項が含まれる不等式になるので、グラフを用いて解くこと。＃問題が解析的に解けないときには、グラフによる解法は重要である）

（５）C 点に（３）で得た T のトルクを付加したとき、C 点のねじり角を求めよ。ただし、棒の剛性率（横弾性係数）を $G = 82\,\mathrm{GPa}$ とする。



【問題 3】以下の各問いに答えよ。

（１）断面積が A、長さが l の棒があり、棒の軸に沿って引張荷重 P を付加したとき λ だけ伸びた。棒の断面に作用する応力 σ、棒のひずみ ε、ヤング率 E を求めよ。

（２）荷重と伸びの間には $P = k\lambda$ の関係が成り立つ。ここで k はばね係数である。k とヤング率 E の関係を表せ。

（３）荷重 P のもと棒は微小距離 $d\lambda$ だけ伸びた。このときなされる微小仕事は $dW = Pd\lambda$ である。棒が λ だけ伸びたときに、荷重 P がなした仕事 W を求めよ。

（４）棒の体積を V とする。棒が微小距離 $d\lambda$ だけ伸びたとき、単位体積あたりになされる微小仕事 dW/V、ならびに λ だけ伸びたとき、単位体積あたりになされる仕事 W/V を、応力、ひずみ、ヤング率を用いて表せ。

第 4 週　解答例

【問題 1】

（1）　$\tau_a = 300/4 = 85\,\text{MPa}$

（2）　$\boxed{T = \int_0^R \frac{\tau_{\max} r}{R} \times r \times 2\pi r dr = \frac{\pi R^3 \tau_{\max}}{2}}$　　分母のコピーし忘れ

（3）　角速度をωとすると、動力は$P = T\omega$であるから、$\boxed{\frac{\pi R^3 \tau_{\max}}{2} = \frac{P}{\omega}}$となる。これより、$\boxed{\tau_{\max} = \frac{2P}{\pi R^3 \omega} \le \tau_a}$が満たされなければならない。よって

$$\boxed{R \ge \left(\frac{2P}{\pi \tau_a \omega}\right)^{1/3}}$$

となる。ここで、$\omega = \frac{2\pi \times 84(\text{rpm})}{60(\text{sec})} = 8.8(\text{rad/sec})$、$P = 100 \times 75\,\text{kg}\cdot\text{m} \times 9.8 = 73500\,\text{N}\cdot\text{m}$ならびに（1）で求めた許容せん断応力を代入すると、

$$\boxed{R \ge 4.06\,\text{cm}}$$

を得る。

【問題 2】

（1）　$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

（2）トルクの釣り合いから、$T = T_1 + T_2$となる。AC 間の比ねじり角をθ_1、CB 間の比ねじり角をθ_2とすると、$T_1 = GI_p\theta_1$、$T_2 = GI_p\theta_2$である。また、C 点におけるねじり角は同じであるから、C 点でのねじり角をφとすると、$\varphi = a\theta_1 = b\theta_2$が満足されなければならない。これらより、

$$T = T_1 + T_2 = GI_p(\theta_1 + \theta_2) = GI_p\varphi\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{GI_p\varphi(a+b)}{ab} = \frac{GI_p\varphi l}{ab}$$

となるので、$\varphi = \frac{Tab}{GI_p l} = \frac{32Tab}{G\pi(D^4 - d^4)l}$を得る。

（3）　$\theta_1 = \frac{\varphi}{a}$、$\theta_2 = \frac{\varphi}{b}$より、$T_1 = GI_p \times \frac{Tb}{GI_p l} = \frac{Tb}{l}$、$T_2 = GI_p \times \frac{Ta}{GI_p l} = \frac{Ta}{l}$となる。

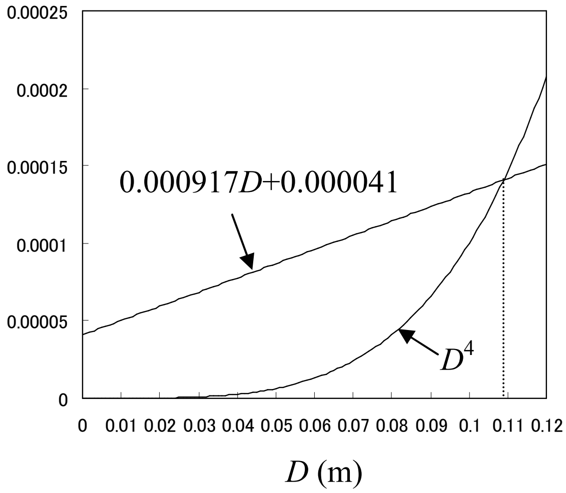
（4）　$T_1 = T/4 = 3\,\text{kN}\cdot\text{m}$、$T_2 = 3T/4 = 9\,\text{kN}\cdot\text{m}$より、最大せん断応力は CB 部の断面に発生する。この最大せん断応力をτ_{max}とすると、

$$\tau_{\max} = \frac{T_2}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{16T_2 D}{\pi(D^4 - d^4)} \le \tau_a \text{ より、} \frac{16T_2 D}{\pi\tau_a} + d^4 \le D^4$$

となる。これにT_2、τ_a、dの値を代入すると、

$$0.000917D + 0.000041 \le D^4$$

を得る。D を横軸にとり、縦軸に左辺、右辺の値をとると下の図のようになる。この図より、$D > 10.9cm$ を得る。



（４） $\varphi = \dfrac{Tab}{GI_p l} = \dfrac{32Tab}{G\pi(D^4 - d^4)l}$ より、

$$\varphi = \frac{32 \times 12 \times 10^3\ \mathrm{N \cdot m} \times 3\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}}{82 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2} \times \pi \times (0.108^4\ \mathrm{m}^4 - 0.8^4\ \mathrm{m}^4) \times 4\,\mathrm{m}} = 0.0118\,\mathrm{rad}$$

【問題３】

（１） $\sigma = \dfrac{P}{A}$、$\varepsilon = \dfrac{\lambda}{l}$、$\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{Pl}{A\lambda}}$

（２） $P = k\lambda$ より、$\boxed{E = \dfrac{kl}{A}}$

（３） $dW = Pd\lambda$、$W = \int dW = \int_0^\lambda Pd\lambda = \int_0^\lambda k\lambda d\lambda = \dfrac{k\lambda^2}{2} = \dfrac{P\lambda}{2} = \dfrac{P^2}{2k}$

（４） $\dfrac{dW}{V} = \dfrac{Pd\lambda}{Al} = \sigma d\varepsilon = E\varepsilon d\varepsilon = \dfrac{\sigma d\sigma}{E}$、$\dfrac{W}{V} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \dfrac{E\varepsilon^2}{2} = \dfrac{\sigma\varepsilon}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2E}$