材料力学　Ｈ１９年度第５週（中村編）

これまでの復習もかねて問題を作っています。提出は中間試験時です。

訂正を加えました。

【問題１】長さ $l = 20$ cm、直径 $d = 20$ mm の棒がある。棒のヤング率は $E = 200$ MPa であり、ポアソン比は $\nu = 0.3$ で、剛性率は $G = E/\{2(1+\nu)\}$ で与えられる。このとき、以下の各問いに答えなさい。ただし、重力の加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。

（１）棒の一端が床に固定されている。棒の自由端に対して、床から 10 m の高さから重さ 2 kgf の剛体球を落下した。圧縮に対する棒の破壊応力は 1 GPa である。剛体球の落下により、この棒が圧縮破壊するかどうか調べよ。

（２）（１）と同様にして棒を床に固定した場合、剛体球の落下により棒の座屈が生じる落下高さ h_{cr} を求めよ。これと（１）の結果を比較して、座屈、圧縮破壊のどちらが起こりやすいかを判定せよ。

（３）棒の両端が剛体壁で固定されている。質量 m の剛体球を棒の中央に静的に置いたところ、はりのたわみは 0.1 mm であった。剛体球の質量 m、ならびに棒に蓄積される弾性エネルギー U を求めよ。

（４）（３）の両端固定棒において、この剛体球を高さ h から棒の中央に落としたところ、棒の中央のたわみが、剛体球を静的に置いたときの５倍になった。落下高さ h を求めよ。また、剛体球を落下させた場合に衝撃によって棒に蓄積される弾性エネルギーを求めよ。

（５）棒は 60 rpm の回転速度で、200 馬力の動力を伝えている。棒に蓄積される弾性エネルギー U を求めよ。（ヒント：せん断変形の場合、単位体積当たりの弾性エネルギーは $\dfrac{U}{V} = \dfrac{\tau\gamma}{2} = \dfrac{\tau^2}{2G}$ で与えられる。ここで V は要素の体積である。従って、長さ l、断面積 A の回転丸棒の場合、断面の微小要素 dA の体積を $dV = l dA$ として、$U = \int_V \dfrac{U}{V} dV = \dfrac{l}{2G}\int_A \tau^2 dA$ となる。従って、まず、断面に作用するせん断応力から求めれば良い）

（６）（５）の問題において、断面のねじれ角 φ を求めよ。また、棒に蓄積される弾性エネルギーが $U = T\varphi/2$ となることを（５）の結果と比較して証明せよ。

材料力学 H19 年度問題第５週　解答例

【問題１】

（１）　棒に作用する衝撃荷重を P、そのときの変位をλ、剛体球の質量を m、落下高さを h とすると、

$$\frac{1}{2}P\lambda = mg(h+\lambda)$$

である。ここで棒の断面積を A とすると、$\lambda = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E}l = \frac{Pl}{AE}$ であるので、上の式は、

$$\frac{l}{2AE}P^2 - \frac{mgl}{AE}P - mgh = 0 \text{、} \therefore P^2 - 2mgP - \frac{2AEmgh}{l} = 0$$

と書き直される。これより直ちに衝撃荷重は、

$$P = mg + \sqrt{m^2g^2 + \frac{2mgAEh}{l}} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2AE}{mg}\frac{h}{l}}\right)$$

となり、2 kgf の剛体球を $h = 10$ m から落下した場合、衝撃荷重は

$$P = 2\times 9.8\,\mathrm{N}\times\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times\pi\times(0.01)^2\,\mathrm{m}^2\times 200\times 10^9\,\mathrm{N/m}^2}{2\times 9.8\,\mathrm{N}}\frac{9.8m}{0.2\,\mathrm{m}}}\right) = 19.6\,\mathrm{N}\times 17726 = 347\,\mathrm{kN}$$

となる。よって、衝撃応力は、

$$\sigma = \frac{347\times 10^3\,\mathrm{N}}{\pi\times(0.01\,\mathrm{m})^2} = 1.11\,\mathrm{GPa}$$

であり、棒の圧縮破壊が生じる。

（２）　棒の断面２次モーメントは$I = \frac{\pi d^2}{64}$であり、座屈荷重は、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^3 Ed^4}{256l^2} = \frac{\pi^3\times 200\times 10^9\,\mathrm{N/m}^2\times(0.02\,\mathrm{m})^4}{256\times(0.2\,\mathrm{m})^2} = 96.9\,\mathrm{kN}$$

である。これを生じる高さは

$$h = \frac{P_{cr}{}^2 l}{2mgAE} - \frac{P_{cr}l}{AE} = \frac{P_{cr}l}{AE}\left(\frac{P_{cr}}{2mg}-1\right)$$

$$= \frac{96.9\times 10^3\,\mathrm{N}\times 0.2\,\mathrm{m}}{\pi\times(0.01\,\mathrm{m})^2\times 200\times 10^9\,\mathrm{N/m}^2}\left(\frac{96.9\times 10^3\,\mathrm{N}}{2\times 2kgf\times 9.8\,\mathrm{N}}-1\right)$$

$$= 0.762\,\mathrm{m}$$

となり、問題（１）の落下高さ 10 m よりもはるかに小さい。よって、棒の座屈のほうが起こりやすい。

（３）　棒の固定端での反力を R_A、反モーメントを M_A とすると、棒の中央に作用する荷重を W として左右対称の条件より $R_A = W/2$ となる。この固定端から x の位置での曲げモー

メントは、$M_x = M_A + Wx/2$ である。よって、固定端でたわみ角とたわみが０であることを考慮して、固定端から中央の点までのたわみの式は、

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -M_A - \frac{Wx}{2}、\quad EI\frac{dy}{dx} = -M_A x - \frac{Wx^2}{4}、\quad EIy = -\frac{M_A x^2}{2} - \frac{Wx^3}{12}$$

となる。左右対称の条件より、棒の中央ではたわみ角が０であるから、

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l/2} = -\frac{M_A l}{2} - \frac{Wl^2}{16} = 0 \text{ より、} \boxed{M_A = -\frac{Wl}{8}}$$

となる。これより、はりの中央でのたわみをδとすると、

$$\boxed{\delta = y|_{x=l/2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Wl^3}{8\times2\times2^2} - \frac{Wl^3}{96}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{Wl^3}{64} - \frac{Wl^3}{96}\right) = \frac{Wl^3}{192EI}}$$

となる。よって、静的に荷重を置いた場合には、

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \frac{192EI}{l^3}\delta = \frac{192E}{l^3}\delta\times\frac{\pi d^4}{64} = \frac{3\pi Ed^4}{l^3}\delta \\ &= \frac{3\pi\times200\times10^9\ \mathrm{N/m^2}\times(0.02\,\mathrm{m})^4}{(0.2\,\mathrm{m})^3}\times0.0001\,\mathrm{m} = 3770\,\mathrm{N} \end{aligned}}$$

の荷重となる。よって、剛体球の質量は $\boxed{m = 385\,\mathrm{kg}}$ であり、静的に置いた時に棒に蓄積される弾性エネルギーは

$$\boxed{U = \frac{W\delta}{2} = \frac{3770\,\mathrm{N}\times0.0001\,\mathrm{m}}{2} = 0.189\,\mathrm{J}}$$

となる。

（４）　（３）の結果より、衝撃荷重を P とし、このときのたわみを δ_{impact} とすると、

$$\boxed{\delta_{impact} = \frac{Pl^3}{192EI}}$$

であり、$\delta_{impact} = 5\delta$ なので、直ちに、$P = 5W$ であることがわかる。落下による位置エネルギーの変化は、曲げで蓄積された弾性エネルギーに等しいので、

$$\boxed{W(h + \delta_{impact}) = \frac{1}{2}P\delta_{impact}}$$

より、

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\frac{P\delta_{impact}}{W} - \delta_{impact} = \left(\frac{5}{2} - 1\right)\times5\delta = \frac{3}{2}\times5\times0.1mm = 0.75mm}$$

となり、表面からわずか 0.75mm の高さから落としただけで、たわみが５倍になる。また、このときの衝撃荷重による弾性エネルギーを U_{impact} とすると、

$$\boxed{U_{impact} = \frac{P\delta_{impact}}{2} = 25\times\frac{W\delta}{2} = 25\times0.189\,\mathrm{J} = 4.73\,\mathrm{J}}$$

となり、弾性エネルギーは 25 倍になることがわかる。

（４）　（５）棒の回転の１分当たりの回転数を n、１秒当たりの角速度をω、伝達する動力を P とすると、トルクは、$T=\dfrac{P}{\omega}=\dfrac{60P}{2\pi n}$ で与えられる。一方、棒の断面に作用するせん断応力は、$\tau=\dfrac{2\tau_{\max}}{d}r$ であるので、トルクは、

$$T=\int_A \tau r dA=\frac{2\tau_{\max}}{d}\int_0^{d/2} r^2 2\pi r dr=\frac{4\pi\tau_{\max}}{d}\frac{d^4}{4\times 16}=\frac{\pi\tau_{\max}d^3}{16}$$

となる。これらより、最大せん断応力は

$$\tau_{\max}=\frac{480P}{\pi^2 n d^3}=\boxed{\frac{480\times 200\times 75\times 9.8\,\mathrm{N\cdot m/s}}{\pi^2\times 60\,\mathrm{rpm}\times(0.02\,\mathrm{m})^3}=14.9\,\mathrm{GPa}}$$

で与えられる。次に、丸棒内に蓄積される弾性エネルギーを考える。ヒントより、

$$U=l\int_A \frac{\tau^2}{2G}dA=\frac{2\tau_{\max}{}^2 l}{Gd^2}\int_0^{d/2} r^2 2\pi r dr=\frac{4\pi\tau_{\max}{}^2 l}{Gd^2}\frac{d^4}{4\times 16}=\frac{\tau_{\max}{}^2\pi d^2 l}{16G}=\frac{\tau_{\max}{}^2 V}{4G}$$

となる。ここで、$V=\pi d^2 l/4$ は丸棒の体積である。ここで、$G=E/\{2(1+\nu)\}$ より、

$$\boxed{\begin{aligned}U&=\frac{(1+\nu)\tau_{\max}{}^2}{2E}V=\frac{(1+0.3)\times(14.9\times 10^9\,\mathrm{N/m^2})^2}{2\times 200\times 10^9\,\mathrm{N/m^2}}\frac{\pi\times(0.02\,\mathrm{m})^2\times 0.2\,\mathrm{m}}{4}\\&=45.3\,\mathrm{J}\end{aligned}}$$

となる。

（６）断面極二次モーメントを I_P、比ねじれ角をθとすると、$T=GI_P\theta$ なので、

$$\boxed{\varphi=l\theta=\frac{Tl}{GI_P}=\frac{\pi\tau_{\max}d^3 l}{16\times G(\pi d^4/32)}=\frac{2\tau_{\max}l}{Gd}=\frac{2\times 14.9\times 10^9\,\mathrm{N/m^2}\times 0.2\,\mathrm{m}}{\dfrac{200\times 10^9}{2\times(1+0.3)}\times 0.02\,\mathrm{m}}=3.87\,\mathrm{rad}}$$

となる。また、弾性エネルギーは

$$U=\frac{1}{2}T\varphi=\frac{1}{2}\frac{T^2 l}{GI_P}=\frac{1}{2G}\left(\frac{\pi\tau_{\max}d^3}{16}\right)^2\frac{32}{\pi d^4}l=\frac{\tau_{\max}{}^2\pi d^2 l}{16G}=\frac{\tau_{\max}{}^2 V}{4G}$$

となり、（５）の結果と一致する。