H19年度　材料力学　中間試験問題（中村編）

解答例はホームページ上にある

直径 d、長さ $l = 8d$ の丸棒がある。棒材のヤング率は E、剛性率は G である。このとき以下の各問いに答えよ。

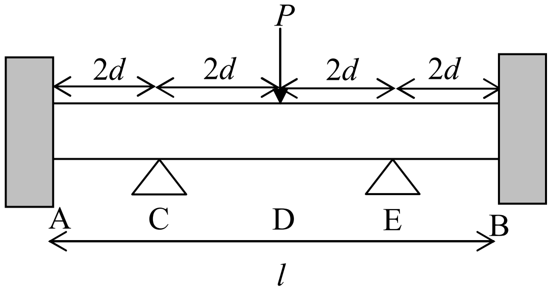


図１

問題１

（１）　棒の断面において図心を通る一つの軸の周りの断面二次モーメント I と、図心の周りの断面二次極モーメント I_p を表せ。（ヒント：$r^2 = x^2 + y^2$ を利用せよ）

（２）　図１に示すように、丸棒は両端を固定され、両端から $2d$ の位置 C、E 点において回転支持を受けている。このとき棒の中央に集中荷重 P が付加された。固定端 A、B ならびに支持点 C、E における反力、反モーメントを求めよ。

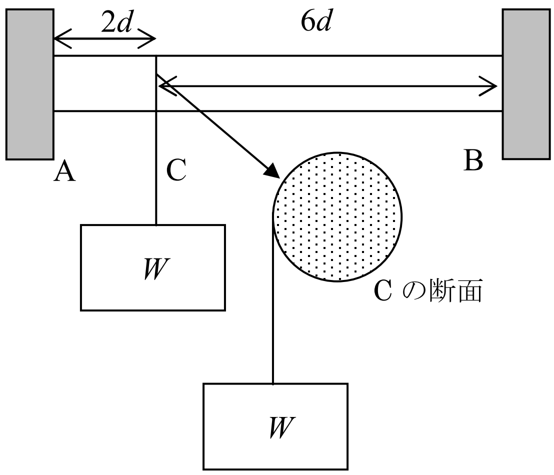


図２

問題２

（１）　図２に示すように、丸棒に C 点で荷重 W のおもりが線材を巻いてぶらさげられた。このとき C に作用するトルク T を求めよ。

（２）　図２において、固定端 A、B に発生するトルク T_A、T_B、ならびに棒内に作用する最大のせん断応力 τ_{max} を求めよ。

問題３

（１）　図２においておもりをつるした線も、丸棒と同じ材料であり、直径は $d/20$、長さは L である。線材の許容応力を σ_a とするとき、棒の位置から落下させた。ただし、棒は大きいので剛体と考えてよい。おもりも剛体と考えてよい。静的応力を σ_o とするとき、衝撃応力 σ は何倍になるかを答えよ。

（２）　図３に示すように、上下に運動する荷重 W の剛体板が床から複数の丸棒に支えられている。ただし、棒の支持点は回転できるものとする。弾性座屈が生じないために必要な丸棒の本数を求めよ。

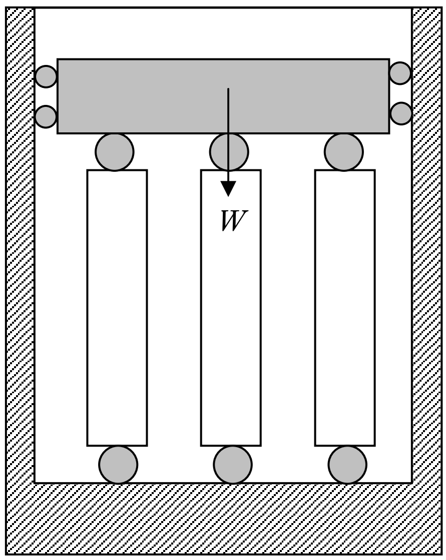


図３

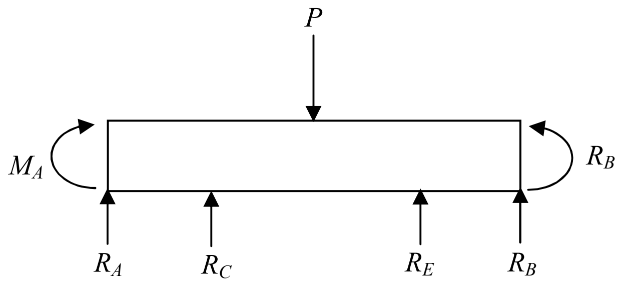
H１９年度材料力学　中間試験　解答例

問題１

（１）　$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} r^2 \times r dr d\theta = 2\pi \dfrac{(d/2)^4}{4} = \dfrac{\pi d^4}{32}$、$I = \dfrac{I_p}{2} = \dfrac{\pi d^4}{64}$

重要　$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x = 2I_x = 2I_y$

（２）　棒の自由体線図は右のようになる。左右対称より力のつりあいは



$$R_A + R_C = R_E + R_B = \frac{P}{2}$$

であり、D 点周りのモーメントのつりあいより

$$M_A + R_A(a+b) + R_C b = M_B + R_B(a+b) + R_E b$$

となる。力の釣り合いの式を代入すると、$M_A = M_B$、$R_A = R_B$、$R_C = R_E$ が満足されなければならない。

AC 間のたわみを y_{AC} とすると、A 点で固定されていることから、

$$\frac{d^2 y_{AC}}{dx^2} = -\frac{M_A + R_A x}{EI}、\frac{dy_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_A x + \frac{R_A x^2}{2}\right)、y_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6}\right)$$

となる。C 点ではたわみがないことから、$y_{AC}\big|_{x=2d} = -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{4M_A d^2}{2} + \dfrac{8Pd^3}{6}\right) = 0$、$M_A = -\dfrac{2R_A d}{3}$ を得る。CB 間のたわみを y_{CB} とすると、

$$\frac{d^2 y_{CB}}{dx^2} = -\frac{M_A + R_A x + R_C(x-2d)}{EI}、\frac{dy_{CB}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_A x + \frac{R_A x^2}{2} + R_C\left(\frac{x^2}{2} - 2dx\right) + C_3\right)、$$

$$y_{CB} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} + R_C\left(\frac{x^3}{6} - dx^2\right) + C_3 x + C_4\right)$$

である。次に C 点でのはりの連続より、

$$2M_A d + \frac{4R_A d^2}{2} = 2M_A d + \frac{4R_A d^2}{2} + R_C\left(\frac{4d^2}{2} - 4d^2\right) + C_3、\therefore C_3 = 2R_C d^2$$

を得る。さらには、

$$0 = R_C\left(\frac{8d^3}{6} - \frac{4d^3}{2}\right) + 4R_C d^3 + C_4 \text{、} \therefore \quad C_4 = -\frac{10R_C d^3}{3}$$

を得る。はりの中央 D 点でたわみ角が 0 であるから、

$$\left.\frac{dy_{CB}}{dx}\right|_{x=4d} = -\frac{1}{EI}\left(4M_A d + \frac{16R_A d^2}{2} + R_C\left(\frac{16d^2}{2} - 8d^2\right) - \frac{10R_C d^3}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{EI}\left(4M_A d + 8R_A d^2 - \frac{10R_C d^2}{3}\right) = 0$$

ここで、$M_A = -\frac{2R_A d}{3}$ より、

$4M_A d^2 + 8R_A d^2 - \frac{10R_C d^2}{3} = -\frac{8R_A d^2}{3} + 8R_A d^2 - \frac{10R_C d^2}{3} = \frac{16R_A d^2}{3} - \frac{10R_C d^2}{3} = 0$ だから、$R_A = \frac{R_C}{2}$

を得る。従って、

$$R_A + R_C = \frac{13R_A}{8} = \frac{P}{2} \text{、} \therefore R_C = R_E = \frac{4P}{13} \text{、} \quad R_A = R_B = \frac{P}{26} \text{、}$$

また、

$$M_A = M_B = -\frac{5Pd}{39} = -\frac{Pd}{9}$$

となる。

重要　不静定はりの場合には、反力、反モーメントを未知としてたわみの拘束条件から解くこと。

問題２

（１）　$T = Wd/2$

（２）　モーメントの釣り合いから、$T = T_A + T_B$ である。C 点の断面のねじれ角をφとすると、

$$\varphi = 2d\theta_A = \frac{2dT_A}{GI_p} \text{、} \varphi = 6d\theta_B = \frac{6dT_A}{GI_p} \text{、これより、} \varphi = \frac{2dT_A}{GI_p} = \frac{6dT_B}{GI_p} \text{、} \therefore T_A = 3T_B$$

となる。よって、$T = T_A + T_B = 4T_B$、$T_B = \frac{Wd}{8}$、$T_A = \frac{3Wd}{8}$ となる。また、これより、最大せん断応力は AC 間で発生し、

$$\tau_{\max} = \frac{T_A}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{3Wd/8}{\pi d^4/32}\frac{d}{2} = \frac{6W}{\pi d^2}$$

となる。

問題３

（１）　線材の伸びをλとすると、線材に働く衝撃応力をσ、断面積をAとして、$\lambda = \dfrac{\sigma}{E}L$、

$P(L+\lambda) = \dfrac{\sigma^2}{2E}AL$より、$P(L+L\dfrac{\sigma}{E}) = \dfrac{\sigma^2}{2E}AL$となる。これより、$\sigma^2 - \dfrac{2P}{A}\sigma - \dfrac{2EP}{A} = 0$、よって、

$$\sigma = \frac{P}{A} + \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2 + \frac{2EP}{A}} = \frac{P}{A} + \frac{P}{A}\sqrt{1+\frac{2EA}{P}} = \sigma_o\left(1+\sqrt{1+\frac{2E}{\sigma_o}}\right)、\therefore \frac{\sigma}{\sigma_o} = 1+\sqrt{1+\frac{2E}{\sigma_o}}$$

だけ静的応力より大きくなる。

（２）　両端回転支持の場合、一本の棒の座屈荷重は、$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$である。よって、座屈が生じない

ための本数をNとすると、$NP_{cr} = \dfrac{N\pi^2 EI}{l^2} > W$より、$N > \dfrac{Wl^2}{\pi^2 EI} = \dfrac{W(8d)^2}{\pi^2 E\pi d^4/64} = \dfrac{4096W}{\pi^3 Ed^2}$

だけ必要となる。