材料力学演習問題　第１回目

１－１．図１－１のように、上辺の幅 b、底辺の幅 $4b$、高さ h の左右対称な台形の断面を有するはりがある。このとき、以下の各問いに答えよ。

（１）上辺に沿った軸を Z とするとき、この軸の周りの断面一次モーメント J_Z と断面二次モーメント I_Z を求めよ。

（２）底辺から図芯 G までの距離 H を求めよ。

（３）図芯 G を通り底辺に平行な z 軸の周りの断面二次モーメント I_z を求めよ。

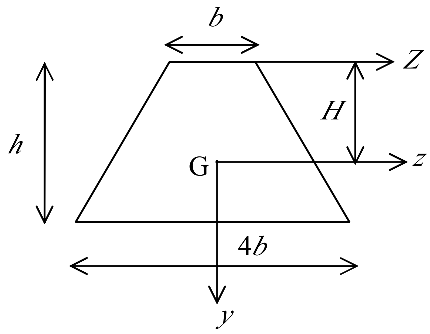


図１－１

１－２．図１－１に示した台形断面をもつ長さ l のはりの一端 A が、図１－２のように剛体壁に固定され、A 点から距離 a の位置で支持されている。はりが自由端 B で集中荷重 P を受けるとき、以下の各問いに答えよ。ただし、はりのヤング率を E とする。

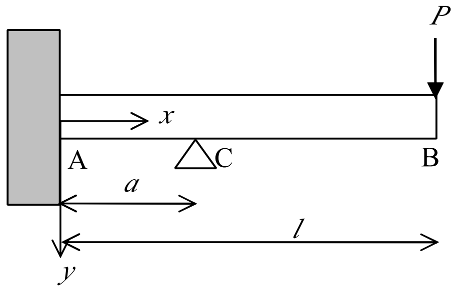


図１－２

（１）はりの自由体線図を描き、固定端 A 点に働く反力を R_A と固定モーメントを M_A、支持 C 点に働く反力を R_C として力ならびにモーメントのつりあい式を求めよ。

（２）固定端 A 点からはりに沿って x 軸をとるとき、AC 間のはりの断面に作用するせん断力 $S_{x,AC}$ と曲げモーメント $M_{x,AC}$ を求めよ（自由体線図を描くこと）。

（３）（１）の結果ならびに AC 間のたわみ角とたわみの境界条件を用いて、R_A、M_A、R_C を求めよ。

（４）CB 間ではりの断面に働くせん断力 $S_{x,CB}$ と曲げモーメント $M_{x,CB}$ を求めよ（自由体線図を描け）。

（５）せん弾力線図（SFD）と曲げモーメント線図（BMD）を描け。

（６）引張の曲げ応力が最大となる位置ならびにその値を求めよ。

１－３．図１－３のように、剛体壁に両端 A と B が固定された長さ l のはりがあり、その中央に集中荷重 P、その全体に均一分布荷重 w が作用している。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。

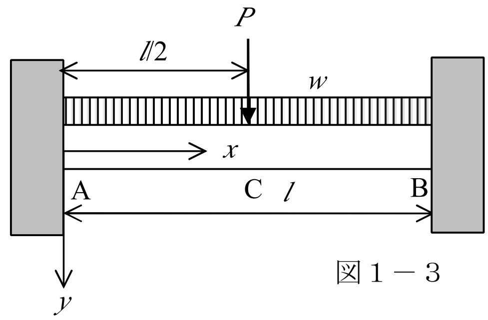


図１－３

（１）はりの自由体線図を描き、A 点の反力を R_A、固定モーメントを M_A、B 点の反力を R_B、固定モーメントを M_B とするとき、力とモーメントのつりあい式を導け。

（２）A 点からはりに沿って x 軸を取る。AC 間での断面に作用するせん断力 $S_{x,AC}$、曲げモーメント $M_{x,AC}$ を求めよ。

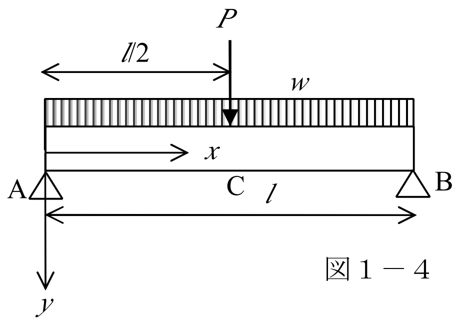


図１－４

（３）AC 間でのたわみを y_{AC} とする。たわみ角とたわみに関する境界条件および（１）の結果を用いて、A 点と B 点における固定モーメント、ならびに C 点のたわみ y_C を求めよ。

（４）また、図１－４のように A、B が回転支持の場合のときの C 点でのたわみを y_{CO} とするとき、y_C と y_{CO} を比較し、たわみに及ぼす両端拘束の影響を調べよ。

材料力学演習　第２回目

２－１．図２－１に示すように、長さ l の片持ちはりの自由端 A 点に集中荷重 P が作用しており、はりは固定端 A 点から a の位置 C でばね係数 k のばねに支えられている。このとき、以下の各問いに答えよ。ただしはりの曲げ剛性を EI とする。

（１）図２－２に示すように自由端 A に荷重 P が働いているものとして、点 C でのたわみ y_{C1} を求めよ。

（２）図２－３に示すように点 C 点に荷重 R_C が作用しているものとして、点 C でのたわみ y_{C2} を求めよ。

（３）図２－１に示すはりの実際の点 C のたわみは $y_C = y_{C1} + y_{C2}$ である。また、ばねの法則より $R_C = ky_C$ でなければならない。これらのことより R_C を求めよ。

（４）図２－１の状態で R_C を求めて、（３）の結果と一致することを確かめよ。

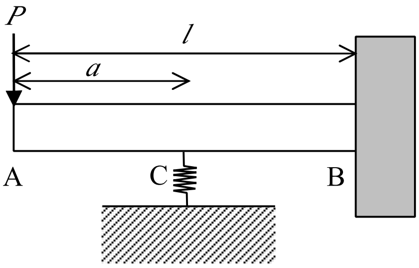


図２－１

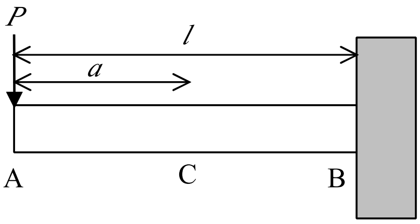


図２－２

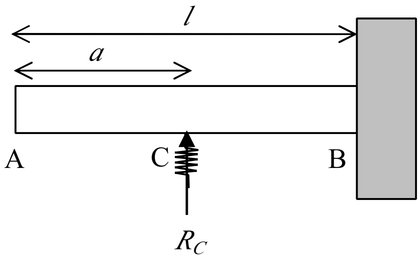


図２－３

２－２．図２－４に示すように、両端が固定された長さ l のはりに均一分布荷重 w が作用するとともに、左端 A から距離 a の位置 C 点に集中荷重 P が作用している。はりの曲げ剛性は EI である。

（１）A 点での反力 R_A、固定モーメント M_A、B 点での反力 R_B、固定モーメント M_B を求めよ。

（２）C 点のたわみ角 i_C とたわみ y_C を求めよ。

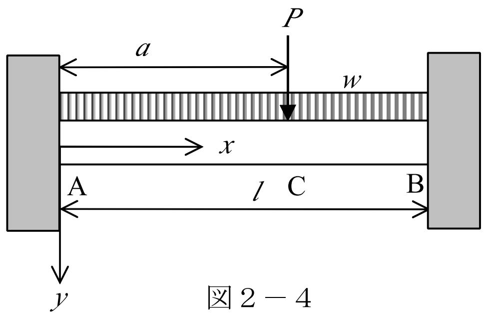


図２－４

２－３．図２－５に示すように、両端が固定された長さ l のはりに A 点での荷重が w_1、B 点での荷重が w_2 となるような直線型の不均一分布荷重が作用している。はりの曲げ剛性を EI として以下の各問いに答えよ。

（１）A 点での反力 R_A、固定モーメント M_A、B 点での反力 R_B、固定モーメント M_B を求めよ。

（２）はりのたわみ角とたわみを求めよ。

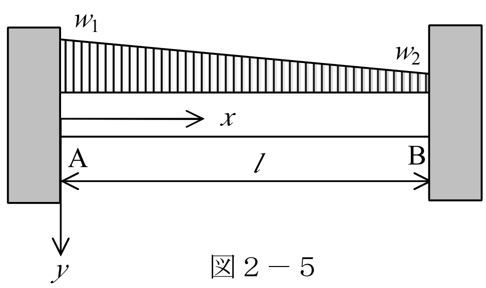


図２－５

２－４．図２－６のように、ヤング率 E、幅 b、高さ h の矩形断面をもつ長さ l のはりの両端が固定されている壁が δ だけずれるものとする。SFD、BMD を描け。また、はりの引張強さを σ_B、安全率を S とするとき、はりの断面に作用する最大曲げ応力が許容応力以下となるずれ量 δ_a を求めよ。

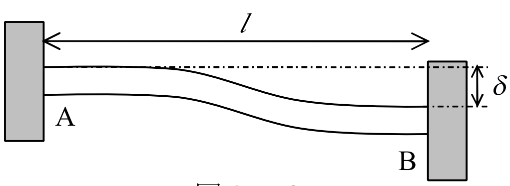


図２－６

材料力学演習　第３回目

３－１．以下の各問いに答えよ。

（１）常微分方程式、$y'' + ay' + by = 0$ の一般解を求めよ。ただし、a、b は実数である。

（２）（１）において $a^2 - 4b \neq 0$ のとき、境界条件 $y|_{x=0} = 0$、$y|_{x=l} = 0$ を満たす解を求めよ。

３－２．図３－１に示すように、半径 R の円がある。このとき以下の各問いに答えよ。

（１）径方向に $r \sim r + dr$、x 軸から反時計回りに角度 $\theta \sim \theta + d\theta$ にある微小領域（射影部）の面積 dA を求めよ。

（２）$I_p = \int_A r^2 dA$ を求めよ（Ip を断面二次極モーメントと言う。教科書第 15 章を見よ）。

（３）x 軸周りと y 軸周りの断面二次モーメントをそれぞれ I_x, I_y とする。$r^2 = x^2 + y^2$ であることから、$I_x = I_y = I_p/2$ となることを示せ。

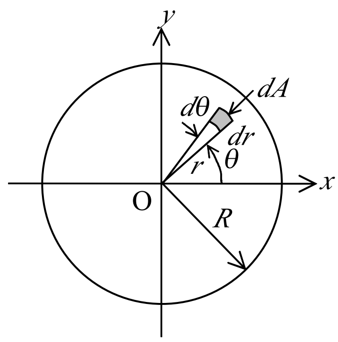


図３－１

３－３．図３－２に示すように、一端 A を床に固定され、他端 B は自由で軸に沿って荷重 P が作用している長さ l、直径 d の丸棒（ヤング率 E）がある。

（１）B 点のたわみを δ とする。固定端 A 点での反力 R_A と固定モーメント M_A を求めよ。

（２）固定端から x の位置での曲げモーメント M_x を求めよ。

（３）たわみを y とするとき、境界条件を求めよ。

（４）境界条件を満たすたわみを求めよ。

（５）中立軸まわりの断面二次モーメント I を求めよ。

（６）臨界座屈荷重 P_{cr} ならびに座屈応力 σ_{cr} を求めよ。

（７）断面積を A とするとき、$k = \sqrt{I/A}$ を断面二次半径といい、細長比は $\lambda = l/k$ で与えられる。断面二次半径と細長比を求めよ。

（８）$d = 4$ mm、$E = 206$GPa のとき、横軸を丸棒の長さ、縦軸を座屈応力とするグラフを描け。

（９）この丸棒の降伏強さは $\sigma_y = 500$ MPa である。したがって、これ以上の応力が付加されると丸棒は塑性変形して座屈が生じる（これを塑性座屈という）。（８）に描いた弾性座屈のグラフに塑性座屈の条件を書き入れよ。また、塑性座屈が生じる棒の長さを求めよ。

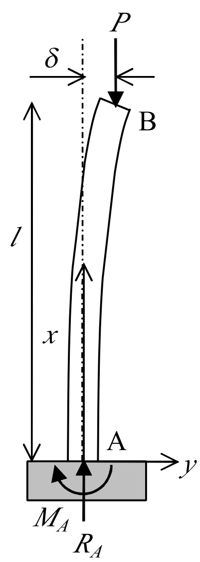


図３－２

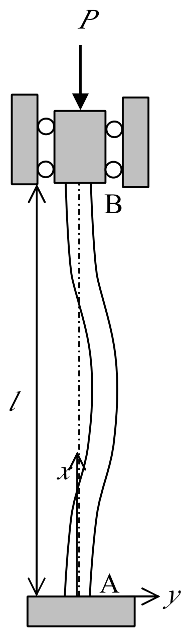


図３－３

３－４．図３－３に示すように、長さ l の長柱の一端 A が床に固定され、他端 B は鉛直方向のみに移動できる。A 点に作用する反力を R_A と固定モーメントを M_A とする。$R_A = P$ は明らかであるが、M_A は不明のままとして、A 点から x の位置での断面に作用する曲げモーメント M_x を求め、境界条件を立ててたわみの式を求めよ。これより、臨界座屈荷重 P_{cr} を求めよ。

材料力学演習　第４回

４－１．図４－１に示すように、半径 R、長さ l の丸棒の一端が剛体壁に固定されており、他端にはトルク T が作用して、棒は一様にねじれている。棒の剛性率は G である。以下の各問いに答えよ。

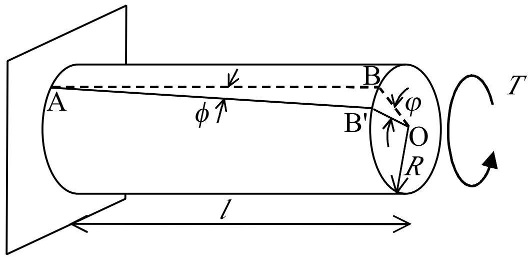


図４－１

（１）棒の表面のせん断ひずみを γ_o とすると、$\gamma_o = \dfrac{BB'}{AB}$ である。表面でのねじれ角を ϕ とするとき、$\gamma_o = \tan\phi \cong \phi$ であることを証明せよ。

（２）断面でのねじれ角を φ とするとき、$\gamma_o = \dfrac{R\varphi}{l} = R\theta \cong \phi$ であることを証明せよ。ただし、$\theta = \varphi / l$ は比ねじれ角である。また、半径 r の位置でのせん断ひずみは、$\gamma = r\theta$ となることを証明せよ。

（３）フックの法則より、半径 r の位置でのせん断応力は $\tau = Gr\theta$ となることを証明せよ。

（４）$l = 2\,\mathrm{m}$、$R = 0.05\,\mathrm{m}$、$G = 82\ \mathrm{GPa}$、$\mathrm{BB'} = 1\ \mathrm{mm}$ であるとき、γ_o、ϕ、φ、θ ならびに表面でのせん断応力 τ_o を求めよ。※ $\tan\varphi \cong \varphi$ であることを確認せよ。※角度の値は単位に気をつけよ。

４－２．図４－２に示すように、丸棒のねじり変形においてせん断応力 τ は断面に平行に円周の接線方向に作用する。以下の各問いに答えよ。

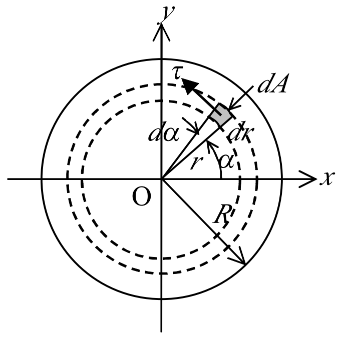


図４－２

（１）径方向に $r \sim r + dr$、x 軸からの角度 $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の範囲にある微小面積 dA に働く力 f を求めよ。

（２）断面の原点 O の周りのモーメントは $dT = fr$ である。断面全体のモーメントの和はトルク $T = \int_A dT = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tau r^2 dr d\alpha$ となることを証明せよ。

（３）問題４－１（３）の結果を用いて、$T = GI_p\theta$ となることを証明せよ。ただし、$I_p = \int_A r^2 dA$ は断面二次極モーメントである。

（４）問題４－１（４）の値ならびに結果を用いて、断面二次極モーメント I_p、トルク T を求めよ。

４－３．図４－３に示すように、一端が固定された半径 $R = 0.04\,\mathrm{m}$、長さ $a + b$ の丸棒（$a = 0.6\,\mathrm{m}$、$b = 0.4\,\mathrm{m}$）に複数の力 $F = 30\,\mathrm{kN}$ が偶力として円の接線方向に作用している。棒の剛性率は $G = 82\,\mathrm{GPa}$ である。以下の各問いに答えよ。ただし自由体線図を描くこと。

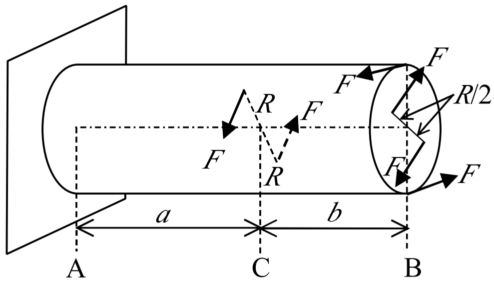


図４－３

（１）固定端 A 点での反トルク T_A を求めよ。

（２）AC 間のトルク T_{AC}、表面でのせん断応力 τ_{AC}、せん断ひずみ γ_{AC} を求めよ。

（３）CB 間のトルク T_{CB}、表面でのせん断応力 τ_{CB}、せん断ひずみ γ_{CB} を求めよ。

４－４．長さ$l = 5\,\mathrm{m}$、外径$d_o = 30\,\mathrm{cm}$、肉厚tの円筒棒が角速度$\omega = 6000\,\mathrm{rpm}$で回転し、20000 馬力の動力を伝えている。また棒の剛性率は$G = 82\,\mathrm{GPa}$である。このとき以下の各問いに答えよ。

（１）棒の材料の許容せん断応力は$\tau_a = 41\,\mathrm{MPa}$である。棒に作用する最大せん断応力が許容せん断応力以下となるような肉厚tを求めよ。

（２）棒のねじれ角が1.5°以下となるようにしたい。肉厚tを求めよ。

（３）（１）と（２）を同時に満たす肉厚tを求めよ。

４－５．図４－４に示すように、長さl_1、直径d_1、剛性率G_1の部材１、長さl_2、直径d_2、剛性率G_2の部材２が連結した丸棒の両端が剛体壁に固定され、部材１の中央 C 点にトルクTが作用している。このとき、以下の各問いに答えよ。

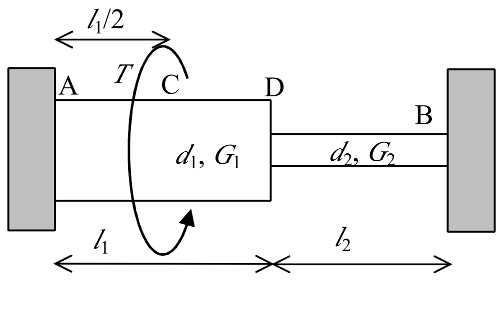


図４－４

（１）固定端 A 点、B 点での反トルクをそれぞれT_A、T_Bとする。丸棒の自由体線図を描き、モーメントのつりあいを表せ。

（２）AC 間において C 点で発生するねじれ角φ_{1C}を求めよ。

（３）BD 間において D 点で発生するねじれ角φ_{2D}を求めよ。

（４）CD 間において D 点を基準とする C 点のねじれ角$\Delta\varphi_{2C}$を求めよ。CB 間において C 点のねじれ角φ_{1C}を求めよ（$\varphi_{2C} = \varphi_{2D} + \Delta\varphi_{2C}$で与えられる）。

（５）AC 間、CB 間における C 点でのねじれ角は同じでなければならない。これよりT_A、T_Bを求めよ。

（６）AC 間の最大せん断応力τ_{AC}、CD 間の最大せん断応力τ_{CD}、DB 間の最大せん断応力τ_{DB}を求めよ。

４－６．全長L、直径d、剛性率Gの細線を巻いて半径Rのコイルばねとした。以下の手順でばね係数kを求めよ。

（１）ばねに引張荷重Pが作用するとき、コイル素線に垂直な長さdsの微小要素に作用するトルクTを求めよ。

（２）素線の比ねじれ角θを求めよ。

（３）微小要素のねじれ角$d\varphi$を求めよ。

（４）微小要素のねじれにより生じる鉛直方向の伸び$d\lambda$を求めよ。

（５）コイル素線全長にわたって鉛直方向の伸びを足し合わせ、全伸びλを求めよ。

（６）上の結果とばねの法則$P = k\lambda$を比較して、ばね係数kを求めよ。

（７）コイルの巻き数をnとするとき、ばね係数kを求めよ。

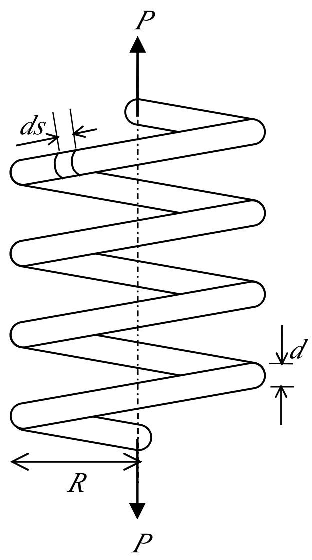


図４－５

（８）コイル素線に作用する最大せん断応力τ_{max}を求めよ。

（９）$G = 72\,\mathrm{GPa}$、$d = 12\,\mathrm{mm}$、$R = 40\,\mathrm{mm}$、$n = 20$となるコイルばねをつくる。ばね係数を求めよ。

（１０）（９）の素材の許容せん断応力は$\tau_a = 40\,\mathrm{MPa}$である。付加しうる許容荷重$P_a$ならびに許容荷重での伸び$\lambda_a$を求めよ。

材料力学演習　第５回

過去の問題は http://mech.kagoshima-u.ac.jp/~nakamura/

５－１．以下の各問いに答えよ。

（１）長さ l、断面積 A の棒に引張（圧縮）荷重 P が作用しているとき、棒に蓄えられる弾性エネルギーは、$U_e = (\sigma\varepsilon/2)V$ となることを示せ。ただし $V = Al$ は棒の体積であり、$u_e = \sigma\varepsilon/2$ は単位堆積あたりの弾性エネルギーである。

（２）高さ h、断面積 A の材料の表面に断面に平行にせん断力 F が作用しているとき、材料に蓄えられる弾性エネルギーは $U_e = (\tau\gamma/2)V$ となることを示せ。ただし $V = Al$ は棒の体積であり、$u_e = \sigma\varepsilon/2$ は単位堆積あたりの弾性エネルギーである。

５－２．以下の各問いに答えよ。ただし重力の加速度を g とする。

（１）質量 m の剛体がある。高さ h から落下したときに減少する位置エネルギー V、ならびに剛体の運動エネルギー KE と速度 v をもとめよ。

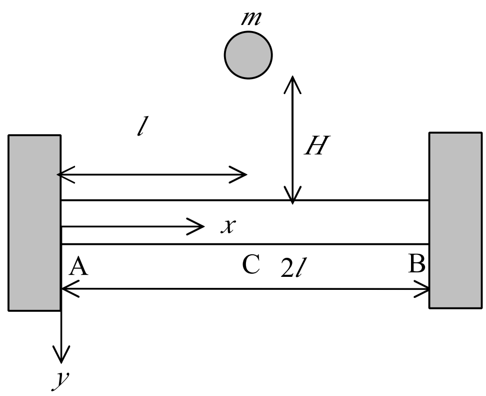
（２）剛体が長さ l、断面積 A の棒に衝突した際に、その運動エネルギーを全て棒の弾性変形に費やすものとする。衝突した剛体の速度が０になったときの棒の縮みを λ とするとき、棒の弾性変形に費やされた仕事 W を求めよ。

（３）棒に蓄えられた弾性エネルギー U_e を求め、$W = U_e$ より衝撃荷重 P ならびに衝撃応力 σ を落下高さ h の関数として求めよ。

（４）衝撃荷重 P ならびに衝撃応力 σ を速度 v の関数として求めよ。

（５）剛体が衝突するまでの運動エネルギー KE と衝突後に静止するまでに失った位置エネルギー ΔV の和が棒になされた仕事なので、$W = KE + \Delta V$ とできる。これを用いて、（４）の結果を導け。

５－３．図５－１のように、両端 A、B が固定された長さ l のはりがあり、その中央 C 点に高さ H から、質量 m の剛体を落下した。はりの断面の幅は b であり高さは h である。また、はりのヤング率は E である。以下の各問いに答えよ。



（１）C 点での衝撃荷重を P とするとき、C 点でのたわみ δ を求めよ。

（２）剛体の衝突によって、はりの変形に費やされた仕事 W を求めよ。

（３）はりに蓄えられた弾性エネルギーは $U_e = P\delta/2$ となる。これより、衝撃荷重を求めよ。

（４）はりの断面に生じる最大の曲げ応力 σ_{max} を求めよ。

（５）$m = 5\,\mathrm{kg}$、$E = 200\,\mathrm{GPa}$、$b = 4\,\mathrm{cm}$、$h = 3\,\mathrm{cm}$、$2l = 2\,\mathrm{m}$ のとき、最大曲げ応力がはりの許容応力 $\sigma_a = 50\ \mathrm{MPa}$ を超えないような落下高さ H を求めよ。ただし重力の加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。